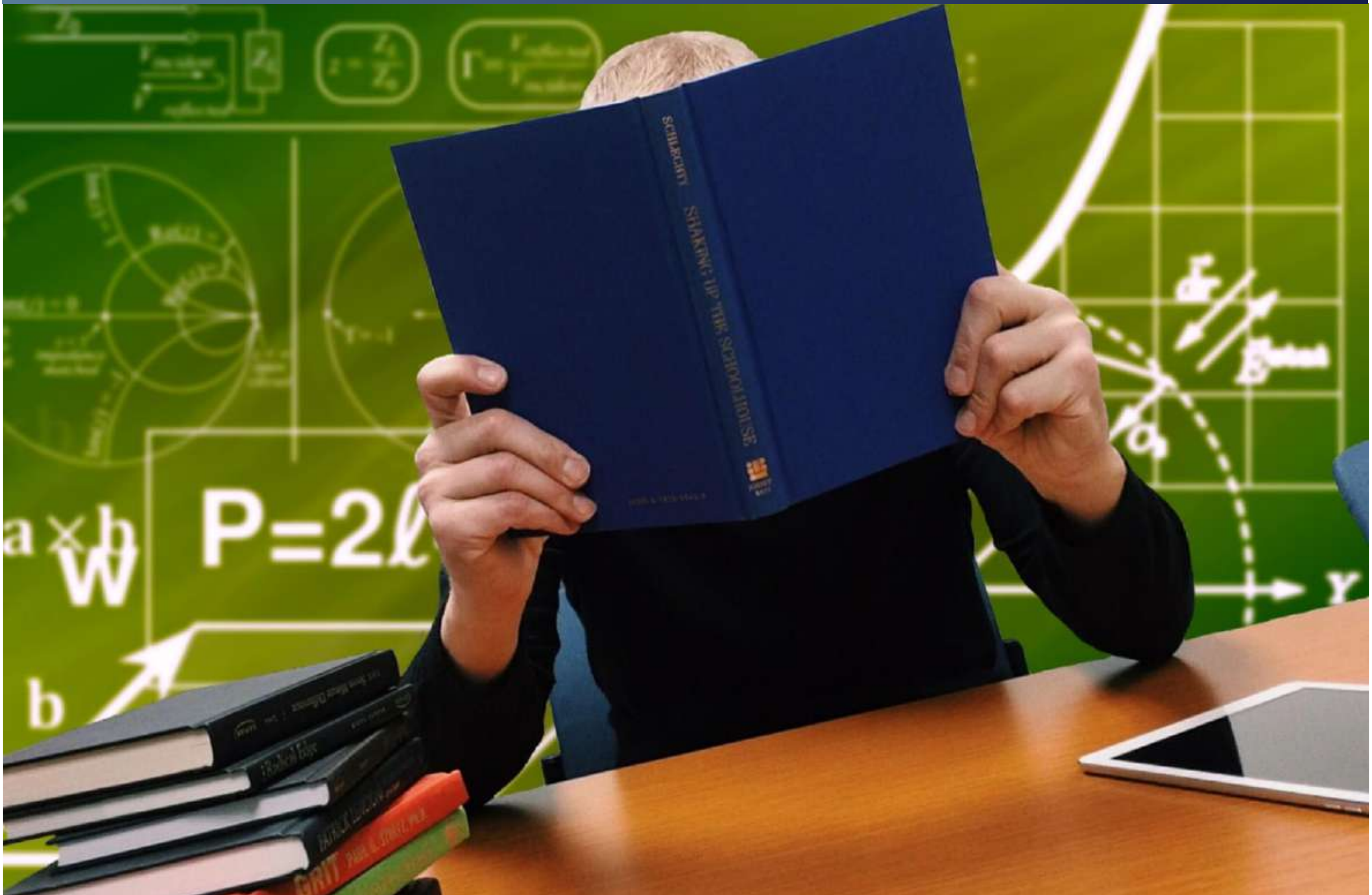
Ejercicios y Talleres



puedes enviarlos a
klasesdematematicasymas@gmail.com

1. Una empresa de ventas en línea dispone de seis líneas telefónicas. Sea X el número de líneas en uso en un tiempo especificado. Suponga que la función de masa o probabilidad se da en la siguiente tabla.

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.06	0.04

Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos

a. {Cuando mucho tres líneas están en uso}
b. {Menos de tres líneas esta en uso}
c. {Por lo menos tres líneas están en uso}
d. {Entre dos y cinco líneas, inclusive, están en uso}
e. {Entre dos y cuatro líneas, inclusive, no están en uso}
f. {Por lo menos cuatro líneas no están en uso}

2. De todos los clientes que adquieren abrepuertas de garajes automáticos, el 75% adquieren el modelo trasmisión por cadena. Sea la variable aleatoria X= el número entre los siguientes 15 compradores que seleccionan el Modelo de Transmisión por Cadena (MTC).

a. ¿Cuál es la función de masa o probabilidad de X?
b. ¿Cuál es la probabilidad que más de 10 compradores selecciona el MTC?
c. ¿Cuál es la probabilidad que más de 5 compradores pero menos de 11 seleccionen el MTC?
d. Calcule la media y la varianza
e. Si la tienda actualmente tiene en existencia 10 modelos de transmisión por cadena y 8 modelos de transmisión por flecha, ¿cuál es la probabilidad de que las solicitudes de estos 15 clientes puedan ser satisfechas con las existencias actuales?

3. Avianca tiente cinco vuelos diarios de Cali a Medellín. Suponga que la probabilidad de que cualquier vuelo llegue tarde sea de 0.20.
   a. ¿Cuál es la probabilidad que ninguno de los vuelos llegue tarde hoy?
   b. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente uno de los vuelos llegue tarde hoy?

4. El 20% de todos los teléfonos de cierto tipo son llevados a servicio mientras se encuentran dentro de la garantía. De estos, 60% pueden ser reparados, mientras el 40% estantes deben ser reemplazados por unidades nuevas. Si una compañía adquiere 10 de estos teléfonos, ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente dos sean reemplazados bajo garantía?

5. Cada uno de 12 refrigeradores de un tipo ha sido regresado a un distribuidor debido a un ruido agudo audible producido por oscilación cuando el refrigerador está funcionando. Suponga que 7 de estos refrigeradores tienen compresor defectuoso y que los otros cinco tienen problemas menos serios. Si los refrigeradores se examinan en orden aleatorio, Se X el número entre los primero 6 examinados que tienen un compresor defectuoso.

a. ¿Cuál es la función de masa o probabilidad de X?
b. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 5 refrigeradores que tienen un compresor defectuoso?
c. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar menos de 4 refrigeradores que tienen un compresor defectuoso?

6. Un producto industrial particular se embarca en lotes de 20. La prueba para determinar si un artículo es defectuoso es costosa y por lo tanto el productor saca una muestra de su producción. Selecciona una muestra de 5 artículos de cada lote y decide rechazar el lote si encuentra más de un artículo defectuoso. El lote contiene cuatro artículos defectuosos. Sea X el número de artículos defectuosos en la muestra.

    a. Plantear la probabilidad de rechazar el lote.
    b. Determine la función de probabilidad y los parámetros de la variable aleatoria.

7. Una cierta área del este de Estados Unidos es afectada en promedio por 6 huracanes al año. Sea x el número de huracanas que se pueden presentaren un año.
    a. Como se distribuye la variable aleatoria x? defina los parámetros de la función de probabilidad.

    b. Plantear la probabilidad que en un determinado año esta área sea afectada al menos por 4 huracanes.

8. El número de ahogados en accidentes por año en un país es de 3 de cada cien mil personas. Hallar la probabilidad de que en una ciudad cuya población es de 200000 haya:
    a. Entre 4 y 8 ahogados
    b. Más de 10 ahogados

9. Si la probabilidad de que un individuo sufra una reacción por una inyección de un determinado suero es de 0.001, determinar la probabilidad de que un total de 2000 individuos.
    a. Exactamente 3 tengan reacción
    b. Más de dos tengan reacción.

10. Se sabe que el 8% de los artículos fabricados en cierta empresa resulta defectuoso. Hallar la probabilidad de que un despacho de 100 de estos artículos seleccionados al azar contenga exactamente 5 artículos defectuosos.
    a. Utilice la distribución binomial
    b. Utilice la distribución de Poisson

11. Un profesor universitario nunca termina su disertación antes del final de la hora y siempre termina dentro de 2 minutos después de la hora. Sea X = el tiempo que transcurre entre el final de la hora y el final de la disertación y suponga que la función de densidad de probabilidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

a. Determine el valor de k y trace la curva de densidad correspondiente. [Sugerencia: El área total bajo la gráfica de f(x) es 1.]
b. ¿Cuál es la probabilidad de que la disertación termine dentro de un minuto del final de la hora?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que la disertación continúe después de la hora durante entre 60 y 90 segundos.
d. ¿Cuál es la probabilidad de que la disertación continúe durante por lo menos 90 segundos después del final de la hora?

12. Una empresa de telefonía celular sabe que la desviación estándar del consumo de los clientes es de 25 minutos, ¿Cuál debe ser el consumo medio de los clientes, si se sabe que la probabilidad de que la media tenga un valor mayor a 250 minutos es de 0.95?

13. El tiempo que transcurre antes de que una persona sea atendida en una cafetería es una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial con una media de 4 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sea atendida antes de que transcurran 3 minutos en al menos 4 de los 6 días siguientes?

14. Suponga que un sistema contiene cierto tipo de componente cuyo tiempo de falla en años está dado por la variable aleatoria T, distribuida exponencialmente con tiempo promedio de falla de 5. Sí 5 de estos componentes se instalan en diferentes sistemas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 continúen funcionando después de 8 años?

15. De acuerdo con la DIAN, el reembolso medio de impuestos en 2004 fue de $2454.Suponga que la desviación estándar es de $650 y que las sumas devueltas tienen una distribución normal.
    a. ¿Qué porcentajes de reembolsos son superiores a $3000?
    b. ¿Qué porcentajes de reembolsos son superiores a $3000 e inferiores a $3 500?
    c. ¿Qué porcentajes de reembolsos son superiores a $2500 e inferiores a $3 500?

16. De acuerdo con una investigación de medios de comunicación, el estadounidense común escuchó en promedio 195 horas de música durante 2009. Esto se encuentra por debajo de las 290 horas en 2005. David es un gran aficionado de la música country y del oeste. Escucha música mientras trabaja en casa, lee y maneja su camión. Suponga que la cantidad de horas que escucha música tiene una distribución de probabilidad normal, con una desviación estándar de 8.5 horas.

    a. Si David se encuentra por encima del 1 % en lo que se refiere a los tiempos que más escuchan música, ¿cuántas horas al año escucha música?

b. Suponga que la distribución de tiempos para 2005 también tiene una distribución de probabilidad normal, con una desviación estándar de 8.5 horas. ¿Cuántas horas en realidad escucha música 1% de los que menos escuchan música?

1.

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.06	0.04

a) $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$
$= 0.10 + 0.15 + 0.2 + 0.25$
$= 0.70$

b) $P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$
$= 0.10 + 0.15 + 0.2$
$= 0.45$

c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X<3)$
$= 1 - 0.45 = 0.55$

d) $P(2 \leq X \leq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$
$= 0.20 + 0.25 + 0.20 + 0.06$
$= 0.71$

e) Cambiamos la variable $X = \#$ líneas que no están en uso

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	0.04	0.06	0.2	0.25	0.20	0.15	0.10

$P(2 \leq X \leq 4) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$
$= 0.2 + 0.25 + 0.2$
$= 0.65$

f) $P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$
$= 0.2 + 0.15 + 0.10 = 0.45$

2. $p = 0.75$ $n = 15$ Es una distribución binomial.

a) Función de masa $P(X) = b(n; p; x) = \dfrac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$

$q = 1 - p$ $q = 0.25$

$P(X) = \dfrac{15!}{(15-x)!\,x!} 0.75^x * 0.25^{15-x}$

b) $P(X > 10) = P(X=11) + P(X=12) + P(X=13) + P(X=14) + P(X=15)$

$P(X=11) = \dfrac{15!}{(15-11)!\,11!} * 0.75^{11} * 0.25^{15-11} = 0.2252$

$P(X=12) = 0.2252$ $P(X=13) = 0.1559$ $P(X=14) = 0.0668$
$P(X=15) = 0.0133$

$P(X > 10) = 0.6865$

c) $P(5 < X < 11) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) + P(X=9)$
$+ P(X=10)$

$P(5 < x < 11) = 0{,}0034 + 0{,}0131 + 0{,}0393 + 0{,}0917 + 0{,}1651$
$= 0{,}3127$

d) Media $\bar{x} = \sum x_i \cdot P(x_i)$

$\bar{x} = 0$

$P(x=0) = 0 \quad P(x=1) = 0 \quad P(x=2) = 0 \quad P(x=3) = 0 \quad P(x=4) = 0{,}0001$
$P(x=5) = 0.0006 \quad P(x=6) = 0{,}0034 \quad P(x=7) = 0{,}0131 \quad P(x=8) = 0{,}0393$
$P(x=9) = 0.0917 \quad P(x=10) = 0.1651 \quad P(x=11) = 0{,}2252 \quad P(x=12) = 0.2252$
$P(x=13) = 0{,}1559 \quad P(x=14) = 0{,}0668 \quad P(x=15) = 0{,}0133$

$\bar{x} = 0*0 + 0*1 + 0*2 + 0*3 + 0.0001*4 + 0.0006*5 + 0{,}0034*6 +$
$0.0131*7 + 0{,}0393*8 + 0{,}0917*9 + 0.1651*10 + 0{,}2252*11 + 0{,}2252*12$
$+ 0{,}1559*13 + 0{,}0668*14 + 0{,}0133*15$

$\bar{x} = 11{,}25$

Varianza $\sigma^2 = E[(x-\mu)^2] = \sum (x-\mu)^2 \cdot P(x_i)$

$\sigma^2 = (0-11{,}25)^2*0 + (1-11{,}25)^2*0 + (2-11{,}25)^2*0 + (3-11{,}25)^2*0$
$+ (4-11{,}25)^2*0{,}0001 + (5-11{,}25)^2*0{,}0006 + (6-11{,}25)^2*0{,}0034$
$+ (7-11{,}25)^2*0{,}0131 + (8-11{,}25)^2*0{,}0393 + (9-11{,}25)^2*0{,}0917$
$+ (10-11{,}25)^2*0{,}1651 + (11-11{,}25)^2*0{,}2252 + (12-11{,}25)^2*0{,}2252$
$+ (13-11{,}25)^2*0{,}1559 + (14-11{,}25)^2*0{,}0668 + (15-11{,}25)^2*0{,}0133$

$\sigma^2 = 2{,}8125$

e) Como se disponen de 10 modelos de transmisión de por cadena $P(x=10) = 0{,}3127$

Es decir que la probabilidad de que sean 10 clientes los que escojan la transmisión de cadena es de 0,3127, se entiende que los otros clientes seleccionan transmisión por flecha

3) $n=5 \quad p = 0{,}20 \quad q = 1-p = 0{,}80$ Distribución binomial

a) $P(x=0)$

$b(x, n; p) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x q^{n-x}$

$b(0; 5; 0.20) = \frac{5!}{(5-0)!\,0!} * 0.20^0 * 0.80^{5-0} = 0{,}3276$

b) $P(x=1) = b(1; 5; 0.2) = \frac{5!}{(5-1)!\,1!}\, 0.20^1 * 0.80^{5-1} = 0{,}4096$

4) $n = 10$ $p = 0{,}20 * 0{,}40 = 0{,}08$ Probabilidad de ser reemplazado
$q = 0{,}92$

$P(x=2) = b(2; 10; 0.08) = \frac{10!}{(10-2)!\,2!} * 0.08^2 * 0.92^{10-2}$

$= 0{,}1478$

5) $p = \frac{7}{12} = 0{,}5833$ Probabilidad de que el compresor sea defectuoso

a) Función de probabilidad binomial

$P(x) = b(x; n; p) = b(x; 6; 0.5833) = \frac{6!}{(6-x)!\,x!} 0.5833^x * 0{,}4166^{6-x}$

X	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	0,0052	0,0439	0,1538	0,2871	0,3015	0,1688	0,0394

b) $P(X=5) = 0{,}1688$

c) $P(X<4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$
$0{,}0052 + 0{,}0439 + 0{,}1538 + 0{,}2871$

$P(X<4) = 0{,}4902$

6) $p = \frac{4}{20} = 0{,}20$ Probabilidad de que el artículo sea defectuoso

$q = 1 - p = 0.80$ $n = 5$

a) $P(\text{Rechazar}) = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$

$P(X=0) = b(0, 5; 0.2) = \frac{5!}{(5-0)!\,0!} 0.2^0 * 0.8^5 = 0{,}3276$

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}3276$
$= 0{,}6724$

b) Función de masa $= P(x) = b(x; 5; 0.2) = \frac{5!}{(5-x)!\,x!} 0.2^x * 0.8^{5-x}$

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	0,3276	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,0003

Media $\bar{x} = E(x) = \sum x_i P(x_i)$

$\bar{x} = 0 * 0.3276 + 1 * 0.4096 + 2 * 0{,}2048 + 3 * 0{,}0512 + 4 * 0{,}0064$
$+ 5 * 0{,}0003$

$\bar{x} = 1$

Varianza $\sigma^2 = E([x-\mu]^2) = \sum (x_i-\mu)^2 \cdot P(x_i)$

$\sigma^2 = (0-1)^2 * 0.3276 + (1-1)^2 * 0.4096 + (2-1)^2 * 0.2048 + (3-1)^2 * 0.0512$
$+ (4-1)^2 * (0.0064) + (5-1)^2 * 0.0003$

$\sigma^2 = 0.8$

7) a) la variable tiene una distribución de poisson.

μ = Promedio = 6

$P(x;\mu) = \dfrac{e^{-\mu} \cdot \mu^x}{x!}$

$P(x;6) = \dfrac{e^{-6} \cdot 6^x}{x!}$

b) $P(x \geq 4) = 1 - P(x < 4)$

$P(x<4) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)$

$P(x=0) = \dfrac{e^{-6} \cdot 6^0}{0!} = 0.0025$

$P(x<4) = 0.0025 + 0.0148 + 0.0446 + 0.0892 \doteq 0.1512$

$P(x \geq 4) = 1 - 0.1512 = 0.8488$

8) $\mu = 3$ por cada 100000

$\mu = 6$ Distribución de poisson

a) $P(4 \leq x \leq 8) = P(x=4) + P(x=5) + P(x=6) + P(x=7) + P(x=8)$

$P(x=4) = \dfrac{e^{-6} \cdot 6^4}{4!} = 0.1338$

$P(4 \leq x \leq 8) = 0.1338 + 0.1606 + 0.1606 + 0.1376 + 0.1032$
$= 0.6960$

b) $P(x>10) = 1 - P(x \leq 10)$

$P(x \leq 10) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) + P(x=6)$
$+ P(x=7) + P(x=8) + P(x=9) + P(x=10)$

$P(x \leq 10) = 0.0025 + 0.0148 + 0.0446 + 0.0892 + 0.1338 + 0.1606 + 0.1606$
$+ 0.1376 + 0.1032 + 0.0688 + 0.0413$

$P(x \leq 10) = 0.9573$

$P(x>10) = 1 - 0.9573 = 0.0427$

9) $p = 0{,}001 \quad n = 2000 \quad q = 1 - p = 0{,}999$

Distribución binomial

a) $P(x=3) = \dfrac{2000!}{(2000-3)!\,3!} * 0.001^3 * 0.999^{2000-3}$

$= \dfrac{2000 * 1999 * 1998 * \cancel{1997!}}{\cancel{1997!} * 3!} * 0.001^3 * 0.999^{1997}$

$= 0{,}1805$

b) $P(x>2) = 1 - P(x \leq 2)$

$P(x \leq 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)$

$P(x=0) = \dfrac{2000!}{2000! * 0!} 0.001^0 * 0.999^{2000} = 0{,}1352$

$P(x=1) = \dfrac{2000 * 1999!}{1999! * 1!} 0{,}001^1 * 0.999^{1999} = 0{,}2707$

$P(x=2) = \dfrac{2000 * 1999 * 1998!}{1998! * 2!} * 0.001^2 * 0.999^{1998} = 0{,}2708$

$P(x \leq 2) = 0{,}1352 + 0{,}2702 + 0{,}2708 = 0{,}6767$

$P(x>2) = 1 - 0{,}6767 = 0{,}3233$

10) $p = 0{,}08 \quad n = 100 \quad x = 5$

$q = 1 - p = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

a) $b(5; 100; 0.08) = \dfrac{100!}{(100-5)!\,5!} * 0.08^5 * 0.92^{100-5}$

$= \dfrac{100 * 99 * 98 * 97 * 96 * \cancel{95!}}{\cancel{95!}\,5!} * 0.08^5 * 0.92^{95}$

$= 0{,}0895$

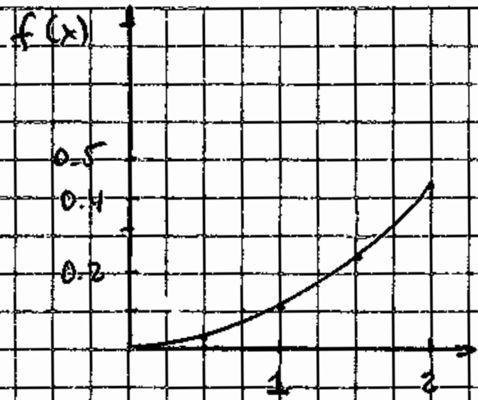
b) Poisson $\quad \mu = np \quad \mu = 100 * 0{,}08 = 8$

$P(5; 8) = \dfrac{e^{-8} \cdot 8^5}{5!} = 0{,}0916$

11) $f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$

$\int_a^b f(x)\,dx = 1 \; ; \; \int_0^2 kx^2\,dx = 1 \quad \dfrac{kx^3}{3}\Big|_0^3 = 1 \quad \dfrac{k}{3}(3^3 - 0^3) = 1$

$\dfrac{k}{3}(27) = 1 \quad 9k = 1 \quad k = \dfrac{1}{9}$



b) $P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{1}{9} * x^2 dx = \frac{1}{9}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{27}(1^3 - 0^3) = \frac{1}{27}$

c) $P(1 \leq X \leq 1.5) = \int_1^{1.5} \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{1}{9}\frac{x^3}{3}\Big|_1^{1.5} = \frac{1}{27}(1.5^3 - 1^3)$

$= 0{,}0879$

d) $P(X \leq 1.5) = \int_0^{1.5} \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{1}{9}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1.5} = \frac{1}{27}(1.5^3 - 0) = 0{,}125$

12) $\sigma = 25 \quad P(X > 250) = 0{,}95$

$P(Z > -1{,}645) = 0.95$

$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad -1{,}645 = \frac{250 - \mu}{25} \qquad -1{,}645 * 25 = 250 - \mu$

$\mu = 250 + 1{,}645 * 25$

$\mu = 291{,}12$

Consumo medio = 291,12 minutos

13) Distribución exponencial $f(x) = \{ \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$

$\theta = 4$

$P(X \leq 3) = \int_0^3 \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = -e^{-x/4}\Big|_0^3$

$= -e^{-3/4} + e^0 = 1 - 0{,}4723$

$= 0{,}5276$

La probabilidad de que alguien sea atendido antes de 3 minutos es de 52,76% durante un día cualquiera.

Ahora se convierte en un problema binomial

$p = 0{,}5276 \quad q = 1 - p = 0{,}4724$

$n = 6$

$P(X \geq 4) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$

$P(X=4) = \frac{6!}{(6-4)!\,4!}\, 0.5276^4 * 0.4724^{6-4} = 0{,}2593$

$P(X \geq 4) = 0{,}2593 + 0{,}1158 + 0{,}0215$
$= 0{,}3968$

14) $f(x) = \left\{ \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \right.$ $\quad f(x) = \left\{ \frac{1}{5} e^{-x/5} \right.$

$\beta = 5$

$P(X \geq 8) = \int_8^\infty \frac{1}{5} e^{-x/5} dx = -e^{-x/5} \Big|_8^\infty$

$= \lim_{b \to \infty} -e^{-x/5} \Big|_8^b = \lim_{b\to\infty} \cancel{-e^{-b/5}}^{\,0} + e^{-8/5}$

$= 0{,}2018$

Se convierte en un problema binomial

$n=5 \quad p = 0{,}2018;\ q = 0{,}7982$

$P(X \geq 2) = ? \qquad P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$

$P(X<2) = P(X=0) + P(X=1)$

$P(X=0) = b(0; 5; 0.2018) = \frac{5!}{(5-0)!\,0!} * 0.2018^0 * 0.7982^{5-0}$

$P(X=0) = 0{,}3240$

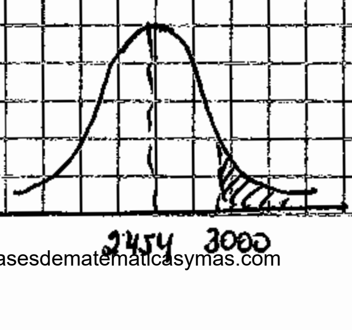
$P(X<2) = 0.3240 + 0.4095 = 0{,}7336$

$P(X \geq 2) = 1 - 0.7336 = 0{,}2664$

15) $\mu = 2454 \quad \sigma = 650$

a) $P(X > 3000)$

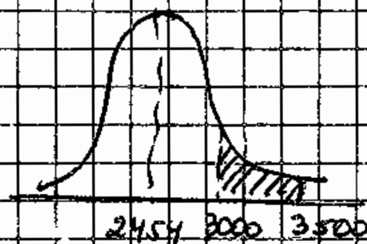
$z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{3000-2454}{650} = 0{,}84$



$P(Z > 0.84) = 1 - P(Z < 0.84)$
$= 1 - 0{,}7995$
$= 0{,}2005$

$P(X > 3000) = 20{,}05\%$

b) $P(3000 < x < 3500)$



$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{3500-2454}{650} = 1{,}6092$

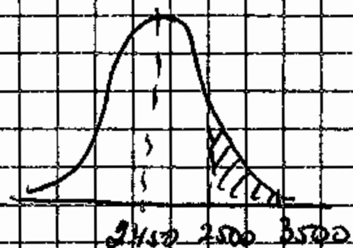
$P(0{,}84 < z < 1{,}61) = P(z<1{,}61) - P(z<0{,}84)$

$= 0{,}9452 - 0{,}7995$

$= 0{,}1457$

$P(3000 < x < 3500) = 14{,}57\%$

c) $P(2500 < x < 3500) = ?$



$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{2500-2454}{650} = 0{,}070$

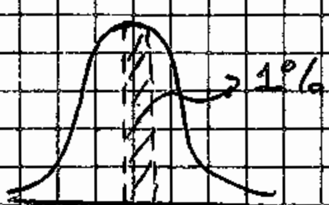
$P(0.07 < z < 1{,}61) = P(z<1{,}61) - P(z<0.07)$

$= 0.9452 - 0.5279 = 0{,}4173$

$P(2500 < x < 3500) = 41{,}73\%$

16) $\mu = 195 \quad \sigma = 8{,}5$

a)



$z = 0{,}025$

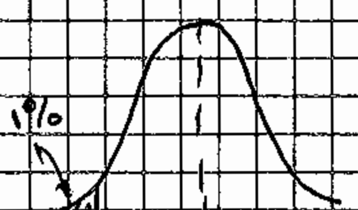
$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad x = \mu + z\sigma$

$x = 195 + 0{,}025 * 8{,}5$

$x = 195{,}213$

Escucha 195,21 horas

b) $\mu = 290 \qquad \sigma = 8{,}5$



$z = -2{,}395 \qquad z = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad x = \mu + z\sigma$

$x = 290 - 2{,}395 * 8{,}5$

$x = 269{,}64$