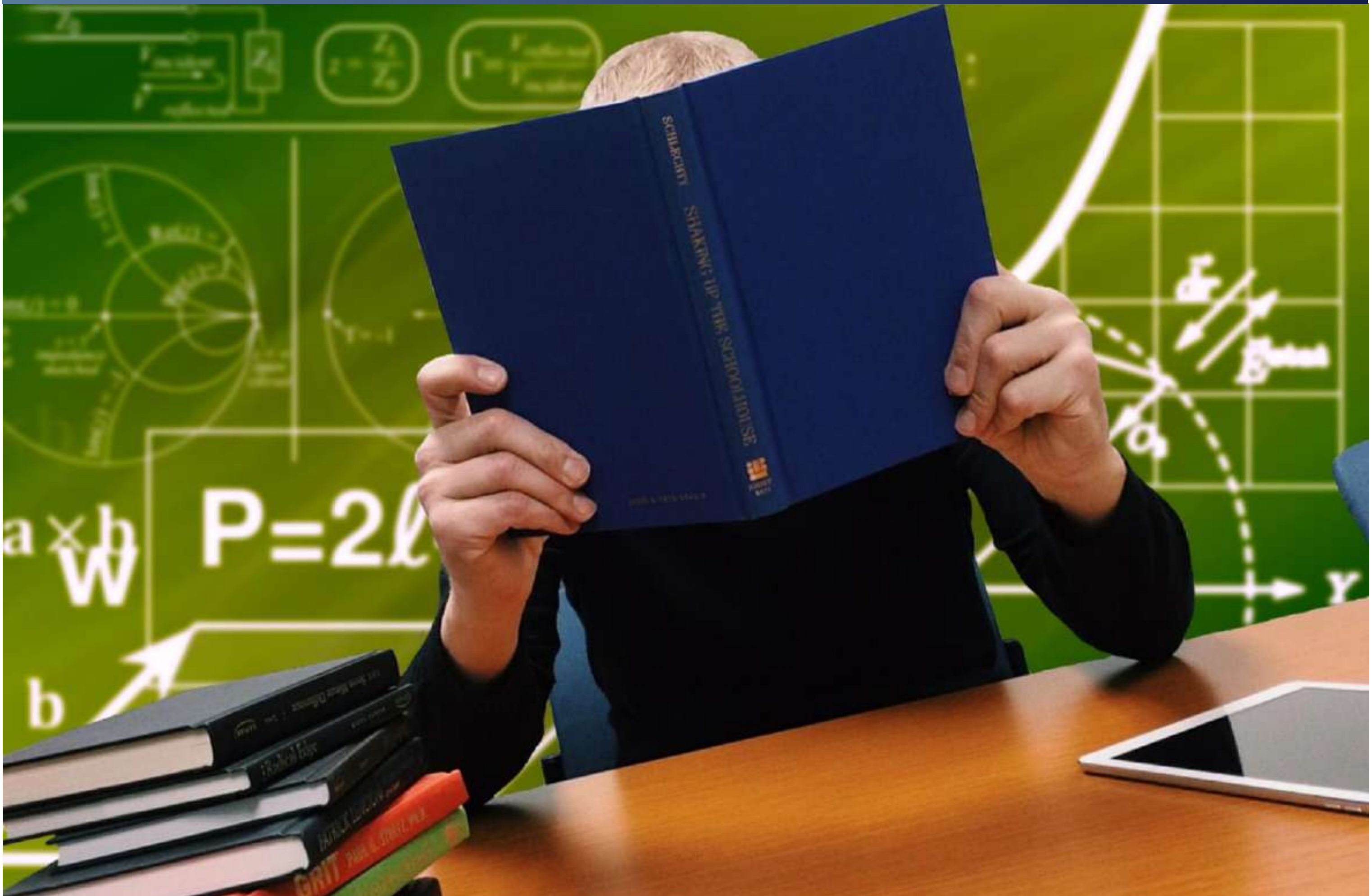
Ejercicios y Talleres



puedes enviarlos a
klasesdematematicasymas@gmail.com

1. Si u = (2,5), v = (-8,4); calcular:
   a. u+v
   b. u-v
   c. 3v-5u
   d. La dirección de u-5v
   e. Dos vectores unitarios paralelos a 2u-(1/2 v)
   f. Determine los escalares h y k tales que w = h.u + k.v, donde w=(5,4).

2. Dos fuerzas de 80 lb y 60 lb forman entre sí un ángulo de 30° y se aplican a un objeto en el mismo punto. Calcule:
   a. La magnitud de la fuerza resultante.
   b. El ángulo que forma la resultante con la fuerza de 60 lb.
3. Demuestre que los tres puntos son colineales, es decir, que pertenecen a la misma recta. (-3,2,4), (6,1,2) y (-12,3,6)

4. Si u =(4,6), v = (2,k), determine k tal que:
   a. u y v sean paralelos
   b. u y v sean ortogonales
   c. u y v tengan un ángulo de π/3.
5. Encuentre un vector que tenga magnitud 3 y el ángulo sea de 2π/3.
6. Sean u = (a,b,c) y v= (d,e,f), establezca una condición sobre a,b,c,d,e y f que asegure que v y $proy_v u$ tengan la misma dirección.
7. En el ejercicio anterior establezca una condición que asegure que v y $proy_v u$ tengan direcciones opuestas.
8. Demuestre que el vector v = ai + bj es ortogonal a la recta ax + by + c = 0.
9. Si u = 2,5,7) y v = (-5,4,-6), calcule:
   a) $Proy_v u$
   b) $Proy_u v$
   c) El ángulo entre u y v.
   d) $Proy_{u-v} u+v$

1. $u = (2,5)$ $\quad v = (-8,4)$

a) $u + v = (2,5) + (-8,4) = (-6,9)$

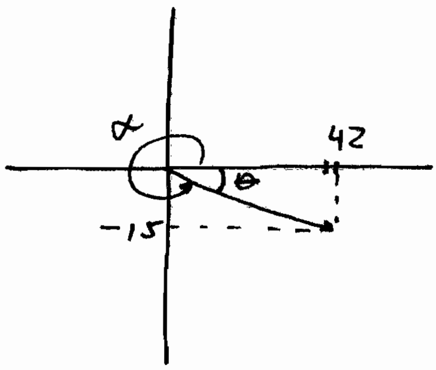
b) $u - v = (2,5) - (-8,4) = (10,1)$

c) $3u - 5v = 3(2,5) - 5(-8,4) = (6,15) + (40,-20) = (46,-5)$

d) $u - 5v = (2,5) - 5(-8,4) = (2,5) + (40,-20) = (42,-15)$

$\tan\theta = \frac{-15}{42} = \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{+15}{42} = 19,65$

$\alpha = 360 - 19,65 = 340,34 \rightarrow$ Direccion



f) $h(2,5) + k(-8,4) = (5,4)$

$(2h, 5h) + (-8k, 4k) = 5,4$

$2h - 8k = 5 \qquad 5h + 4k = 4$

$h = \frac{5}{2} + 4k \qquad 5\left(\frac{5}{2} + 4k\right) + 4k = 4$

$\frac{25}{2} + 20k + 4k = 4$

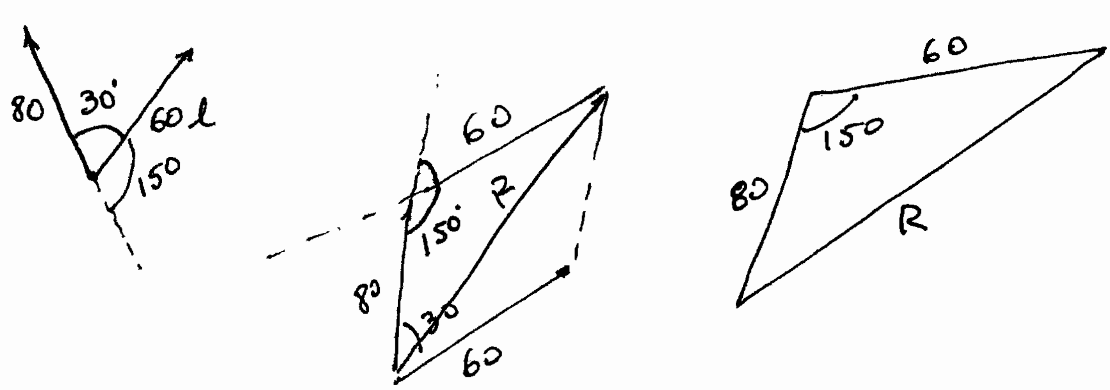
$-24k = 4 - \frac{25}{2}$

$-24k = -\frac{17}{2} \qquad k = \frac{-17}{-48} \qquad k = \frac{17}{48}$

$h = \frac{5}{2} - 4 * \frac{17}{48} \qquad h = \frac{5}{2} - \frac{17}{12} = \frac{13}{12}$

$h = \frac{13}{12} \qquad k = \frac{17}{48}$

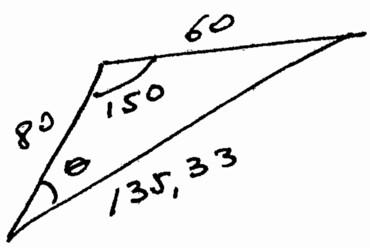
2.



Por ley de cosenos $\quad R^2 = 80^2 + 60^2 - 2 * 80 * 60 \cos 150$

$R^2 = 18313,84 \qquad R = 135,33$

b)



$$\frac{60}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{135,33}{\operatorname{sen}150}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{60} = \frac{\operatorname{sen}150}{135,33}$$

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{60 * \operatorname{sen}150}{135,33}$ $\operatorname{sen}\theta = 0,2216$

$\theta = 12,80$

Por tanto el ángulo entre la resultante y la fuerza de 60 lbs es

$$30 - 12,80 = 17,2°$$

3) $(-3,2,4)$ $(6,1,2)$ y $(-12,3,6)$

Encontramos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Vector director $(-3,2,4)-(6,1,2)$

$$= (-9,1,2)$$

$\langle x,y,z\rangle = t(-9,1,2) + (-3,2,4)$

$x = -9t-3$
$y = t+2$
$z = 2t+4$

El otro punto debe satisfacer

$(-12,3,6)$

$-12 = -9t-3$	$3 = t+2$	$6 = 2t+4$
$-12+3 = -9t$	$3-2 = t$	$6-4 = 2t$
$-9 = -9t$	$1 = t$	$2 = 2t$
$1 = t$		$t = 1$

Por tanto son colineales.

4. $u = (4,6)$ $v = (2,k)$

a) Paralelos $|u \times v| = 0$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & k \\ 4 & 6 & 0 \\ 2 & k & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}(4k-12) \qquad 4k-12=0 \qquad k=\frac{12}{4} \qquad k=3$$

$u = (4,6)$ $v = (2,3)$ son paralelos

b) Ortogonales

$u \cdot v = 0$

$(4,6) \cdot (2,k) = 8 + 6k = 0 \quad 6k = -8 \quad k = -8/6$

$k = -\frac{4}{3}$

$(4,6), (2, -4/3)$ son ortogonales

c) ángulo de $2\pi/3$

$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|}$

$\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{(4,6)\cdot(2,k)}{\sqrt{4^2+6^2}\sqrt{2^2+k^2}} \qquad -\frac{1}{2} = \frac{8+6k}{\sqrt{52}\sqrt{4+k^2}}$

$-1 = \frac{16+12k}{\sqrt{52}\sqrt{4+k^2}} \qquad \left(-\sqrt{52}\sqrt{4+k^2}\right)^2 = (16+12k)^2$

$52 \cdot (4+k^2) = 16^2 + 2 * 16 * 12k + (12k)^2$

$108 + 52k^2 = 2704 + 384k + 144k^2$

$0 = 2704 + 384k + 144k^2 - 108 - 52k^2$

$0 = 2596 + 384k + 92k^2$

$92k^2 + 384k + 2596 = 0$ Es cuadrática

$k = \frac{-384 \pm \sqrt{384^2 - 4(92)(2596)}}{2 * 92}$ No tiene raíces reales.

No existe un k para el cual lo dos tengan un ángulo de $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

5) $u = (x, y)$

$\sqrt{x^2+y^2} = 3 \qquad x^2+y^2 = 3$

$\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{2\pi}{3} \qquad \frac{y}{x} = \tan\frac{2\pi}{3} \qquad y = -x\sqrt{3}$

$x^2 + (-x\sqrt{3})^2 = 3$

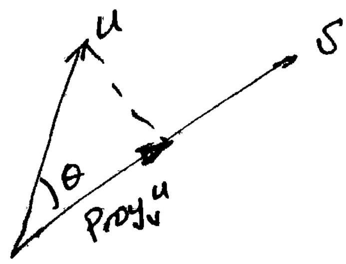
$x^2 + x^2 \cdot 3 = 3 \qquad 4x^2 = 3 \qquad x^2 = 3/4 \qquad x = \pm\sqrt{3}/2$

$y = \mp \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} \qquad y = \mp\frac{3}{2}$

Vectores $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

6. $\text{Proy}_v u = \dfrac{u \cdot v}{|v|^2} \cdot v$

Ahora por definición $\text{Proy}_v u$ está en la dirección de v por tanto a, b, c, d, e f pueden ser cualquier valor



El ángulo debe ser inferior a 90°

$0 < \cos\theta < 1$

$0 < \theta < \pi/2$

$\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{|u||v|}$ $\qquad u \cdot v > 0$

$(a,b,c) \cdot (d,e,f) > 0$

Se debe cumplir $\longrightarrow$ $ad + be + cf > 0$.

8. Direcciones opuestas

$\theta > 90$ $\qquad u \cdot v < 0$

$a \cdot d + be + cf < 0$

9. $u = (2,5,7)$ $\quad v = (-5,4,-6)$

a) $\text{Proy}_v u = \dfrac{u \cdot v}{|v|^2} v = \dfrac{(2,5,7)\cdot(-5,4,-6)}{\left(\sqrt{(-5)^2+4^2+(-6)^2}\right)^2} (-5,4,-6)$

$= \dfrac{-10+20-42}{\left(\sqrt{25+16+36}\right)^2} \cdot (-5,4,-6) = \dfrac{-32}{77}(-5,4,-6)$

$= \left(\dfrac{160}{77}, -\dfrac{128}{77}, \dfrac{192}{77}\right)$

b) $\text{Proy}_u v = \dfrac{u \cdot v}{|u|^2} \cdot u = \dfrac{-32}{\left(\sqrt{2^2+5^2+7^2}\right)^2}(2,5,7)$

$= -\dfrac{32}{78}(2,5,7) = \left(-\dfrac{64}{78}, \dfrac{-160}{78}, -\dfrac{224}{78}\right)$

c) $\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{|u||v|}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{-32}{\sqrt{77}\sqrt{78}} \Rightarrow \cos\theta = -0{,}4129$

$\theta = \cos^{-1} -0{,}4129$ $\qquad \theta = 114{,}38°$

d) $\text{Proy}_{u-v}\, u+v$

$u+v = (2,5,7) + (-5,4,-6)$
$= (-3,9,1) = \omega$

$u-v = (2,5,7) - (-5,4,-6)$
$= (7,1,13) = s$

$$\text{Proy}_{u-v}\, u+v = \text{Proy}_s\, w = \frac{w\cdot s}{|s|^2}\cdot s$$

$$w\cdot s = (-3, 9, 1)\cdot(7, 1, 13) = -21+9+13 = 1$$

$$\text{Proy}_s\, w = \frac{1}{\left(\sqrt{7^2+1^2+13^2}\right)^2}\cdot(7, 1, 13)$$

$$= \frac{1}{219}(7, 1, 13) = \left(\frac{7}{219}, \frac{1}{219}, \frac{13}{219}\right)$$