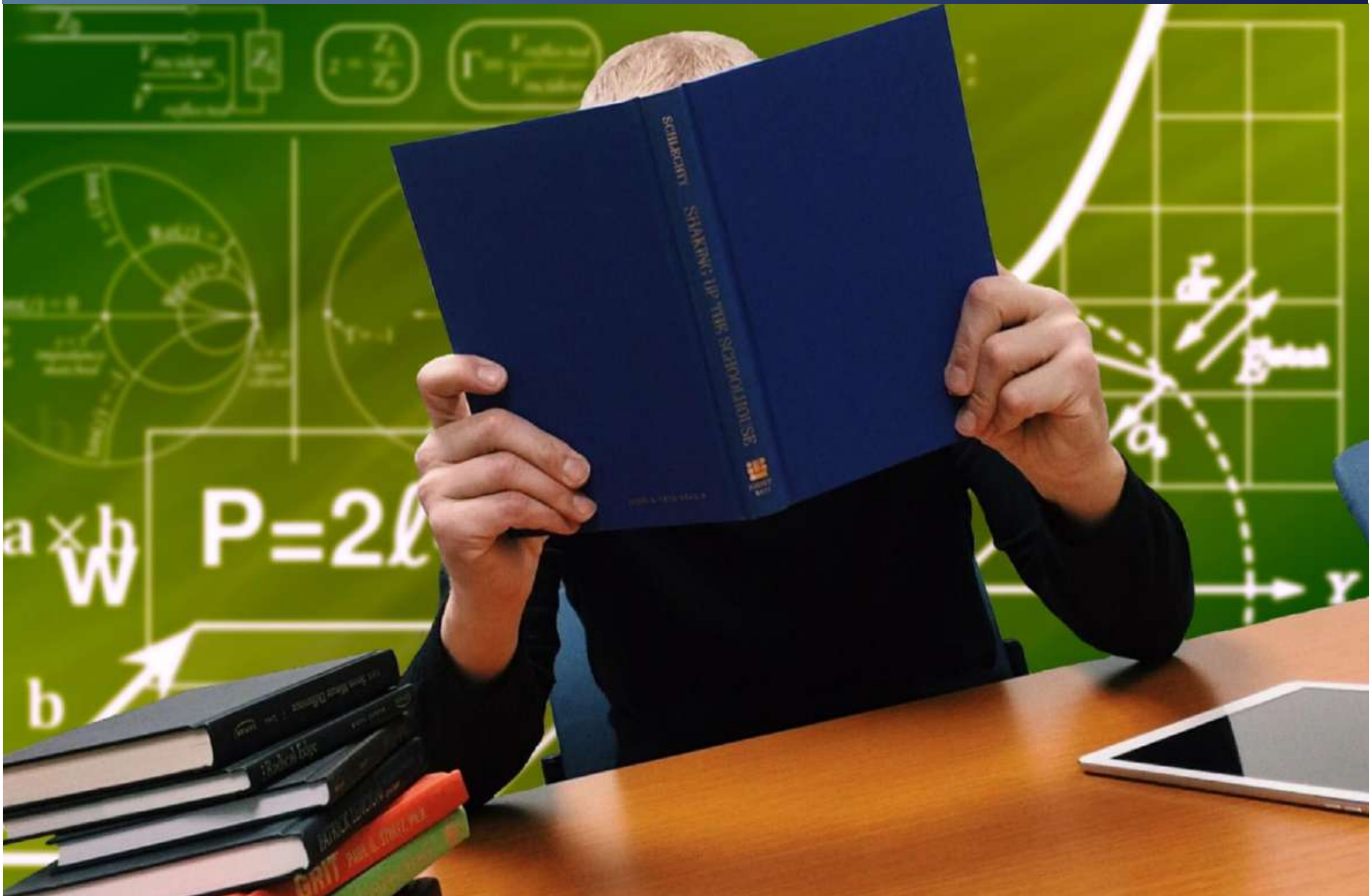
Ejercicios y Talleres



puedes enviarlos a
klasesdematematicasymas@gmail.com

SUPERFICIES CUADRICAS - CILINDROS

APLICACIONES

OBJETIVOS

Analizar características y propiedades en la representacion de superficies cuádricas.

Emplear la visualización,el razonamiento espacial y la modelación geométrica en representaciones de superficies.

SUPERFICIES CUADRICAS

Una superficie cuádrica corresponde a la gráfica de una ecuación de segundo grado en las variables X, Y, Z. De la forma:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DXY + EYZ + FXZ + GX + HY + JZ + K = 0$$

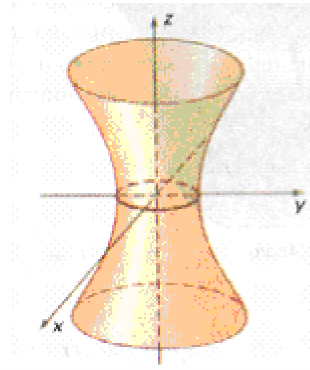
donde A,B,C... son números reales.

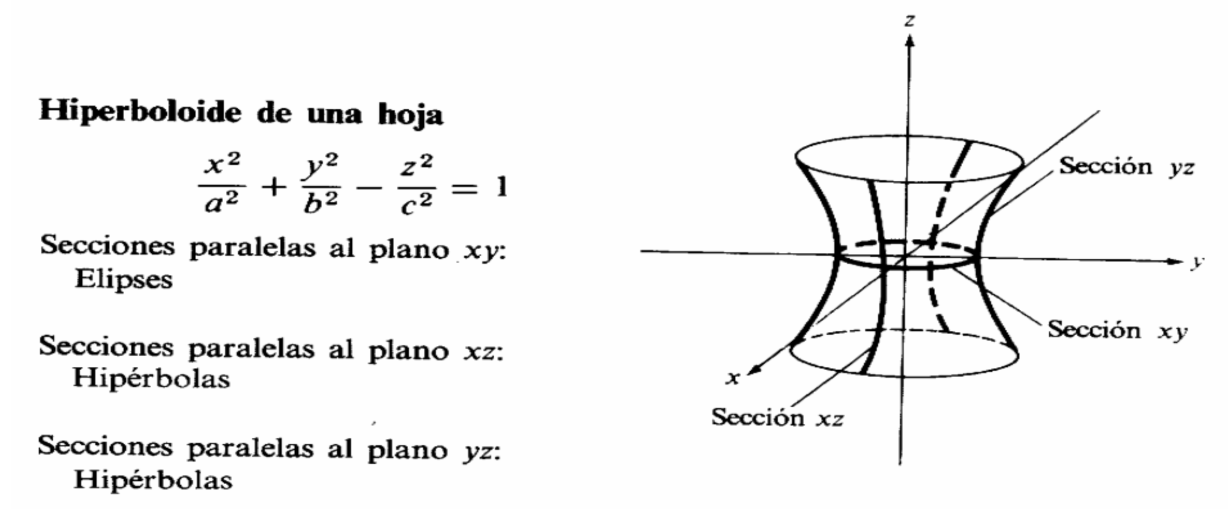
Hay seis tipos básicos de superficies cuádricas:
* Elipsoide
* Hiperboloide de una hoja
* Hiperboloide de dos hojas
* Cono elíptico
* Paraboloide elíptico
* Paraboloide hiperbólico

Estas superficies se caracterizan porque sus trazas (intersecciones con los planos coordenados) y/o sus curvas de nivel (intersecciones con planos paralelos a los planos coordenados), corresponden a secciones cónicas tales como círculos, elipses, hipérbolas, parábolas, etc.

La forma canónica de la ecuación de una superficie cuádrica, corresponde a aquella que tiene su centro en el origen y ejes de simetrías coincidiendo con los ejes coordenados

La forma canónica de la ecuación de una superficie cuádrica, corresponde a aquella que tiene su centro en el origen y ejes de simetrías coincidiendo con los ejes coordenados.Por ejemplo, la forma canónica del hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ tiene su centro en el origen y ejes de simetrías coincidiendo





con los ejes coordenados.El hiperboloide es simétrico respecto a cada uno de los planos coordenados.Las intersecciones del sólido con los planos coordenados son secciones cónicas correspondientes a hipérbolas y elipses.Por ejemplo la intersección con el plano $y=0$

es la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{z^2} = 1.$

Ejercicio 1

Escriba las secciones cónicas correspondientes a las intersecciones de los planos

$x=0$ y $z=0$ con el hiperboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Si x=0 entonces

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Si z=0

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cada intersección es una elipse con centro en el origen

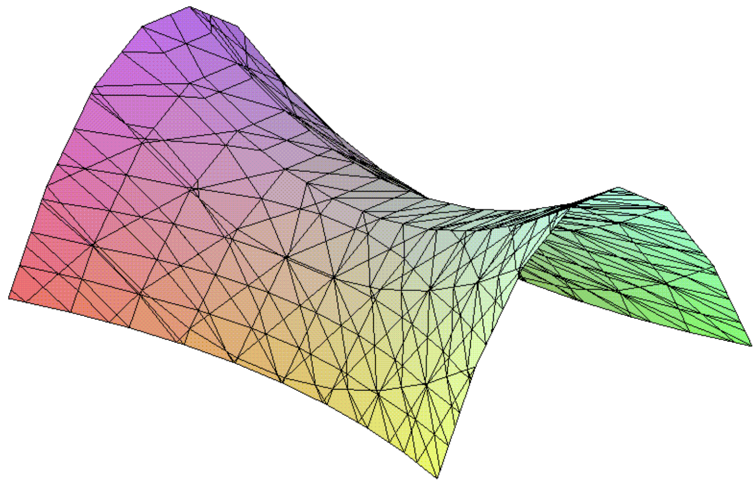
Vía MAPLE la sintaxis a emplear para realizar la gráfica de las superficies cuádricas es :

```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> implicitplot3d(F(x,y,z)=c,x=a1..b1,y=a2..b2,z=a3..b3);
Error, (in plots/iplot3d/implicit3d) bad range arguments x = a1 .. b1, y = a2
.. b2, z = a3 .. b3
```

A manera de ilustración realizamos la gráfica del paraboloide hiperbólico $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = z.$

```
> with(plots):
> implicitplot3d( y^2/16  - x^2/9 =z,x=-25..25,y=-16..16,
  z=-22..22);
```



Ejercicio 2

Escriba las intersecciones del sólido $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=z$ con los planos $x=0$ y $y=0$.

Si x = 0

$$\frac{y^2}{16}=z$$

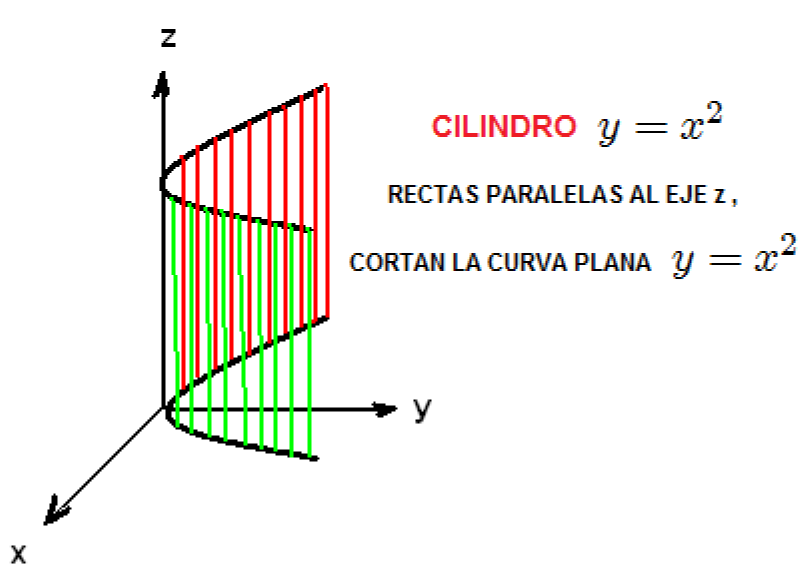
Si y = 0

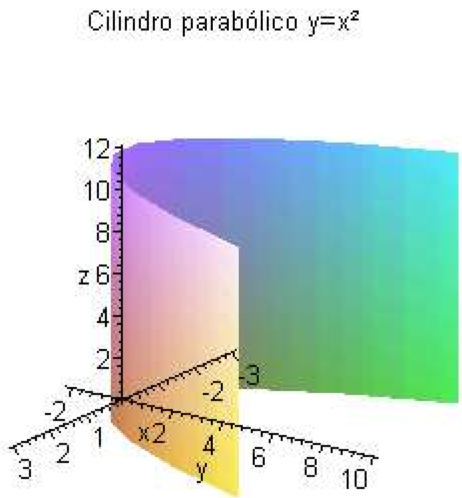
$$-\frac{x^2}{9}=z$$

En ambos casos se obtienen unas parábolas.

Otras superficies cuádricas son los cilindros. Estas superficies son generadas por todas las rectas paralelas (a una recta fija en el espacio) que cortan a una curva plana dada. Observe a continuación la gráfica del cilindro parabólico $y=x^2$.

```
> with(plots):
> implicitplot3d(y=x^2,x=-3..3,y=0..10,z=0..10,title=`cilindro parabólico y=x²`):
>
>
```





Ejercicio 3

Identifique las trazas con los planos coordenados y grafique cada una de las superficies cuádricas:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ b) $x^2 - y^2 = z$ c) $16\,x^2 + 9\,y^2 = 4\,z^2$ d) $4\,z^2 - x^2 - y^2 = 4$ e) $z = 3\,x^2$ f) $x = y^2 + z^2$

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$x = 0$

$y^2 + z^2 = 4$ Es un círculo de radio 2 en el plano yz

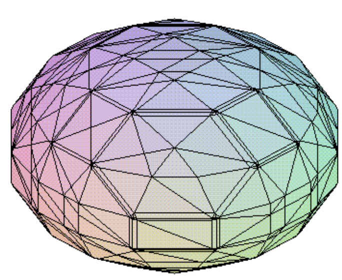
Si y = 0

$x^2 + z^2 = 4$ Es un círculo de radio 2 en el plano xz

Si z = 0

$x^2 + y^2 = 4$ Es un círculo de radio 2 en el plano xy

```
> implicitplot3d(x^2+y^2+z^2=4,x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
```



$x^2 - y^2 = z$

$x = 0$

$-y^2 = z$ Es una parábola en el plano yz

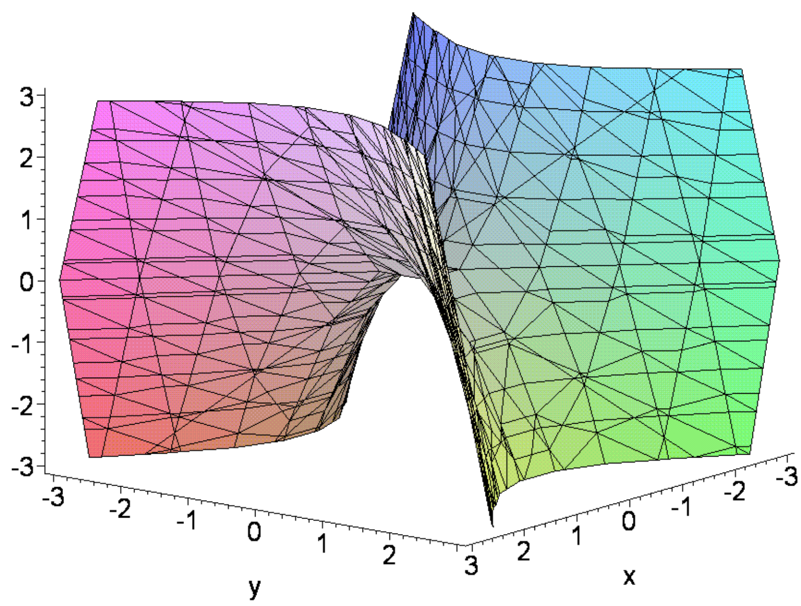
Si y = 0

$x^2 = z$ Es una parábola en el plano xz

Si z = 0

$x^2 - y^2 = 0$ Es una hipérbole en el plano xy

```
> implicitplot3d(x^2-y^2=z,x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
```



$16x^2 + 9y^2 = 4z^2$

$x = 0$

$9y^2 = 4z^2$ En el plano yz

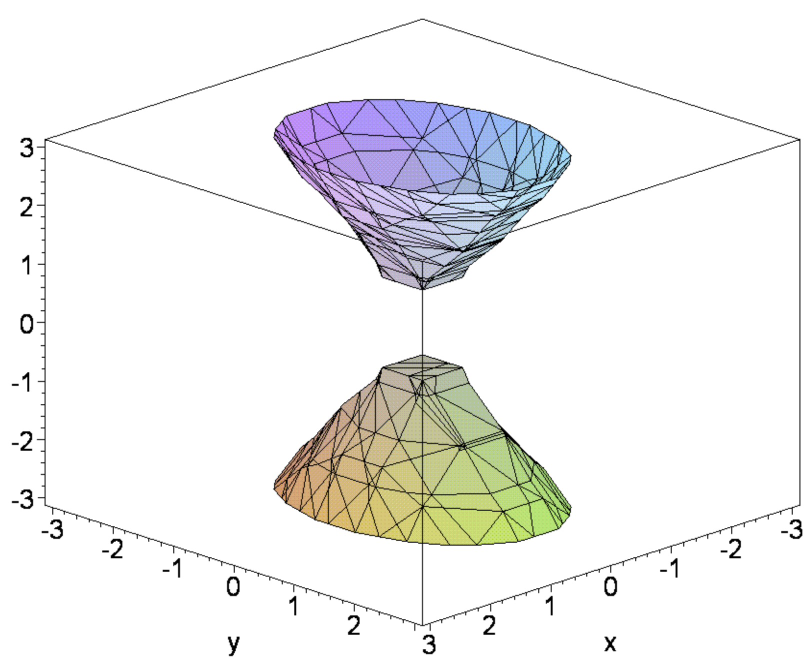
Si y = 0

$16x^2 = 4z^2$ en el plano xz

Si z = 0

$16x^2 + 9y^2 = 0$ En el plano xy

```
> implicitplot3d(16*x^2+9*y^2 =
  4*z^2,x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
```

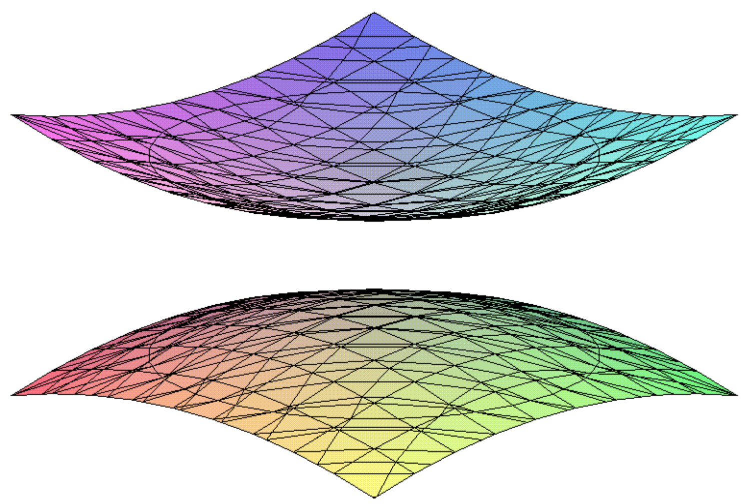


$4z^2 - x^2 - y^2 = 4$

$x = 0$

$4z^2 - y^2 = 4$ En el plano yz
Si y = 0
$4z^2 - x^2 = 4$ en el plano xz
Si z = 0
$-x^2 - y^2 = 4$ En el plano xy

```
> implicitplot3d(4*z^2-x^2-y^2 =
  4,x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
```

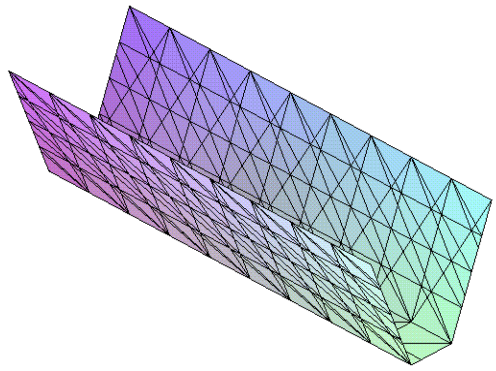


```
>
```

$z = 3x^2$

$x = 0$
$z = 0$ En el plano yz
Si y = 0
$z = 3x^2$ en el plano xz
Si z = 0
$0 = 3x^2$ En el plano xy

```
> implicitplot3d(z = 3*x^2,x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
```



$x = y^2 + z^2$

$x = 0$

$0 = y^2 + z^2$ En el plano yz

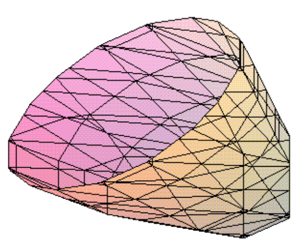
Si y = 0

$x = z^2$ en el plano xz

Si z = 0

$x = y^2$ En el plano xy

```
> implicitplot3d(x = y^2+z^2,x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3);
```



```
>
```

Ejercicio 4

El lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al punto (2,-1,3) es dos veces su distancia al plano XY, corresponde a una superficie cuádrica. Hallar la ecuación de esta superficie, identificarla y realizar un bosquejo de ella.

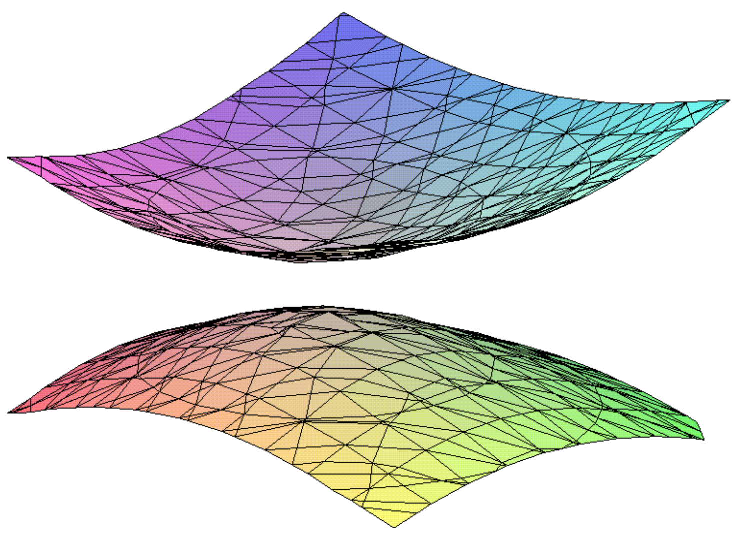
D((x,y,z);(2,-1,3)=2*D((x,y,z);(x,y,0))

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2} = 2\sqrt{(x-x)^2+(y-y)^2+(z-0)^2}$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 4\left((x-x)^2+(y-y)^2+(z-0)^2\right)$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 = 4z^2$$

```
> implicitplot3d((x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2 =
  4*z^2,x=-10..10,y=-10..10,z=-10..10);
```

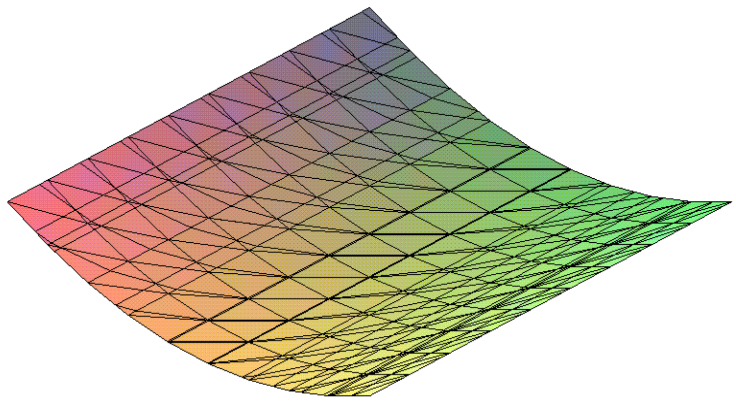


```
>
```

Ejercicio 5

Realice un bosquejo de la región limitada por los planos $z=0$, $x=0$, $x=1$, $y=-1$, $y=1$ y el cilindro $z=y^2$

```
> implicitplot3d(z=y^2,x=0..1,y=-1..1,z=0..5);
```



>