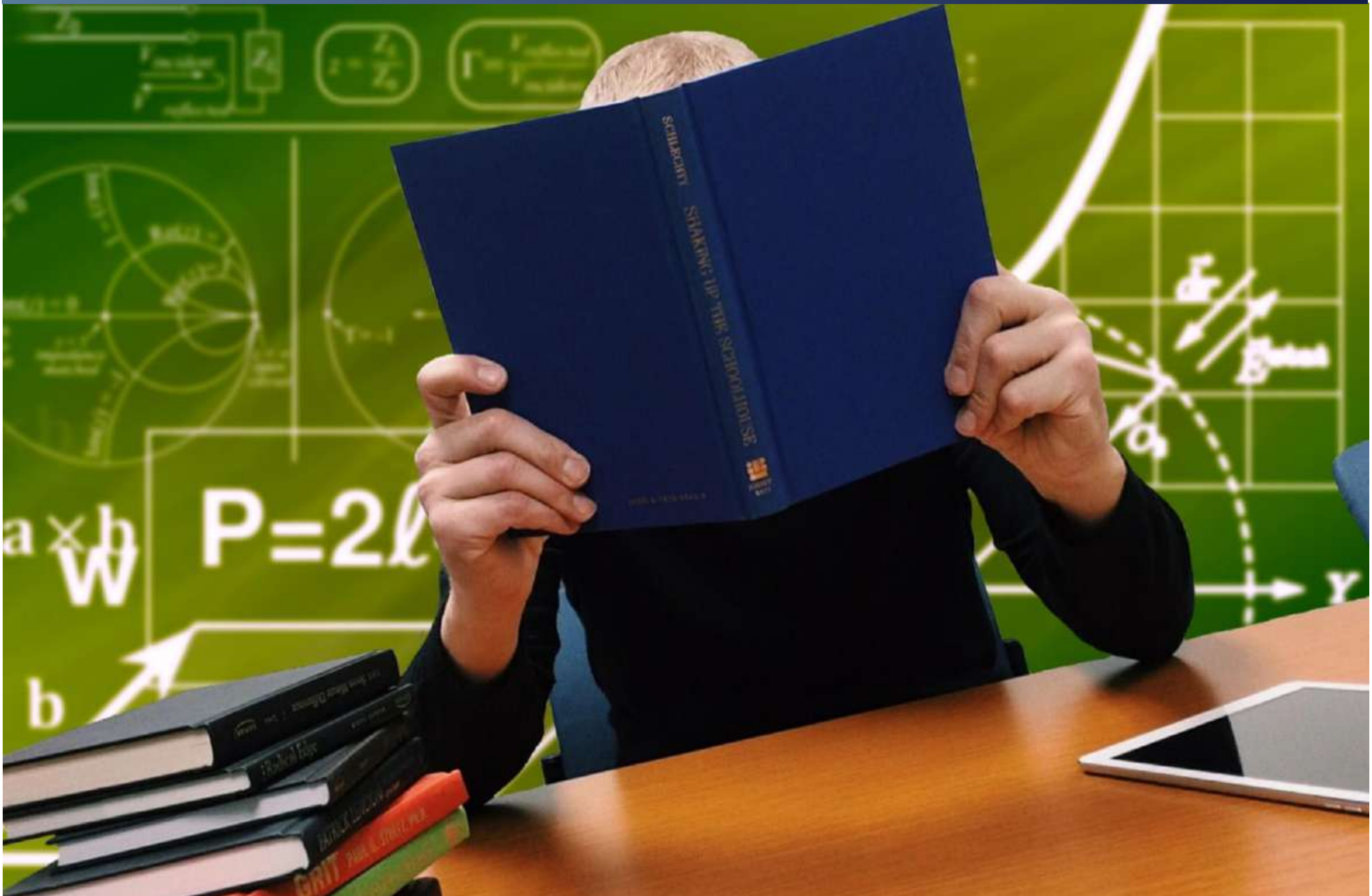
Ejercicios y Talleres



puedes enviarlos a
klasesdematematicasymas@gmail.com

1. Utilizando los métodos de solución de las integrales encontrar:

a) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

b) $\int x^2 e^{-3x} dx$

2. Por medio de las propiedades de las integrales resolver

a) $\int \frac{3}{2-x} dx$

b) $\int \frac{2x-5+x^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

3. Hallar el área limitada por $f(x) = 4 - x^2$ y $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$. Graficar.

4. Encontrar los cinco primeros términos de la sucesión y averiguar si converge o no:

$$a_n = \frac{-n^3 + 2}{n^3 + 2n^2 + 1}$$

5. Hallar el volumen del sólido formado por la región que gira alrededor del eje x acotado por las gráficas de $y = x^2 + 2$; $y = \frac{1}{2}x + 1$. Realizar la gráfica.

6. Utilizando el cálculo integral hallar el volumen del solido generado por la región acotada por la función $y = x^3$, $y = 8$ y $y = 1$ al girarlo respecto al eje y.

1. a) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$

$u = \operatorname{sen} x$
$du = \cos x \, dx$
$dx = \dfrac{du}{\cos x}$

$$\int u^2 \cdot \cancel{\cos x} \cdot \frac{du}{\cancel{\cos x}} = \int u^2 \cdot du$$

$$= \frac{u^3}{3} + c = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C.$$

b) $\int x^2 \cdot e^{-3x} dx$ Integral por partes.

$u = x^2 \qquad dv = e^{-3x} dx$
$du = 2x\, dx \qquad v = -\frac{1}{3} e^{-3x}$

$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du \qquad \int x^2 \cdot e^{-3x} = -\frac{x^2}{3} e^{-3x} + \int \frac{2}{3} x e^{-3x} dx$

Ahora $\int x e^{-3x} dx$ nuevamente es por partes.

$u = x \qquad dv = e^{-3x} dx$
$du = dx \qquad v = -\frac{1}{3} e^{-3x}$

$$\int x e^{-3x} = -\frac{1}{3} x e^{-3x} + \int \frac{1}{3} e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x}$$

Por tanto.

$$\int x^2 e^{-3x} dx = -\frac{x^2}{3} e^{-3x} + \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x}\right]$$

$$= \frac{x^2}{3} e^{-3x} - \frac{2}{9} x e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x} + C.$$

2) a) $\int \frac{3}{2-x} dx \qquad u = 2-x \quad du = -dx \qquad dx = -du$

$$\int \frac{3}{u} \cdot -du = -\int \frac{3}{u} du = -3 \ln u = -3 \ln|2-x| + C$$

b) $\int \frac{2x-5+x^2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int \frac{2x-5+x^2}{x^{2/3}}\,dx$

$= \int \frac{2x}{x^{2/3}} - \frac{5}{x^{2/3}} + \frac{x^2}{x^{2/3}}\,dx$

$= \int \left(2x^{1/3} - 5x^{-2/3} + x^{4/3}\right)dx$

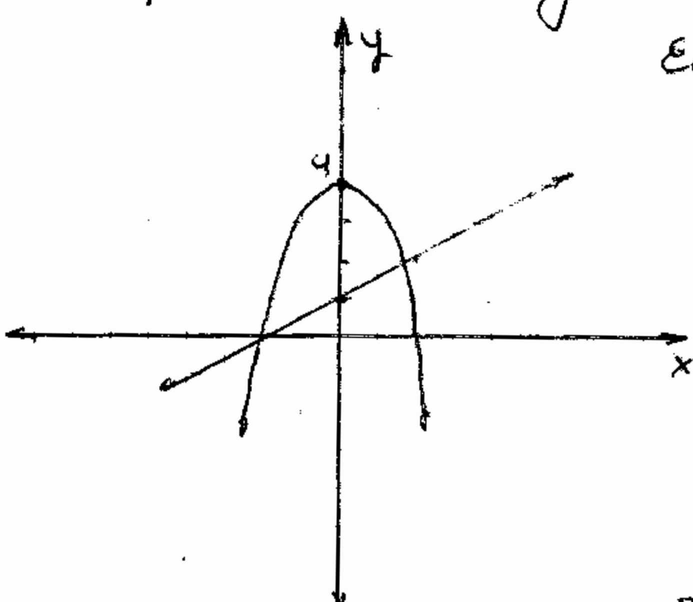
$= 2\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} - \frac{5x^{-2/3+1}}{-\frac{2}{3}+1} + \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C$

$= 2\frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} - \frac{5x^{1/3}}{\frac{1}{3}} + \frac{x^{7/3}}{7/3} + C$

$= \frac{6}{4}x^{4/3} - 15x^{1/3} + \frac{3}{7}x^{7/3} + C$

$= \frac{3}{2}x^{4/3} - 15x^{1/3} + \frac{3}{7}x^{7/3} + C.$

3. $f(x) = 4 - x^2$ $\quad g(x) = \frac{1}{2}x + 1$



Encontramos los puntos de corte

$4 - x^2 = \frac{1}{2}x + 1$

$8 - 2x^2 = x + 2$

$2x^2 + x + 2 - 8 = 0$

$2x^2 + x - 6 = 0$

$(x+2)(2x-3) = 0$

$x + 2 = 0 \quad x = -2$

$2x - 3 = 0 \quad x = 3/2$

$A = \int_{-2}^{3/2} \left[(4-x^2) - \left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]dx = \int_{-2}^{3/2}\left(3 - x^2 - \frac{1}{2}x\right)dx = 3x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{3/2}$

$$= \left(3\cdot\frac{3}{2} - \frac{(3/2)^3}{3} - \frac{1}{2}\,\frac{(3/2)^2}{2}\right) - \left(3(-2) - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{1}{2}\,\frac{(-2)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{343}{48}$$

4. $a_n = \left\{ \dfrac{-n^3+2}{n^3+2n^2+1} \right\}$

$$a_1 = \frac{-1^3+2}{1^3+2\cdot 1^2+1} = \frac{1}{4}$$

$$a_2 = \frac{-2^3+2}{2^3+2\cdot 2^2+1} = \frac{-6}{17}$$

$$a_3 = \frac{-3^3+2}{3^3+2\cdot 3^2+1} = \frac{-25}{46}$$

$$a_4 = \frac{-4^3+2}{4^3+2\cdot 4^2+1} = \frac{-62}{97}$$

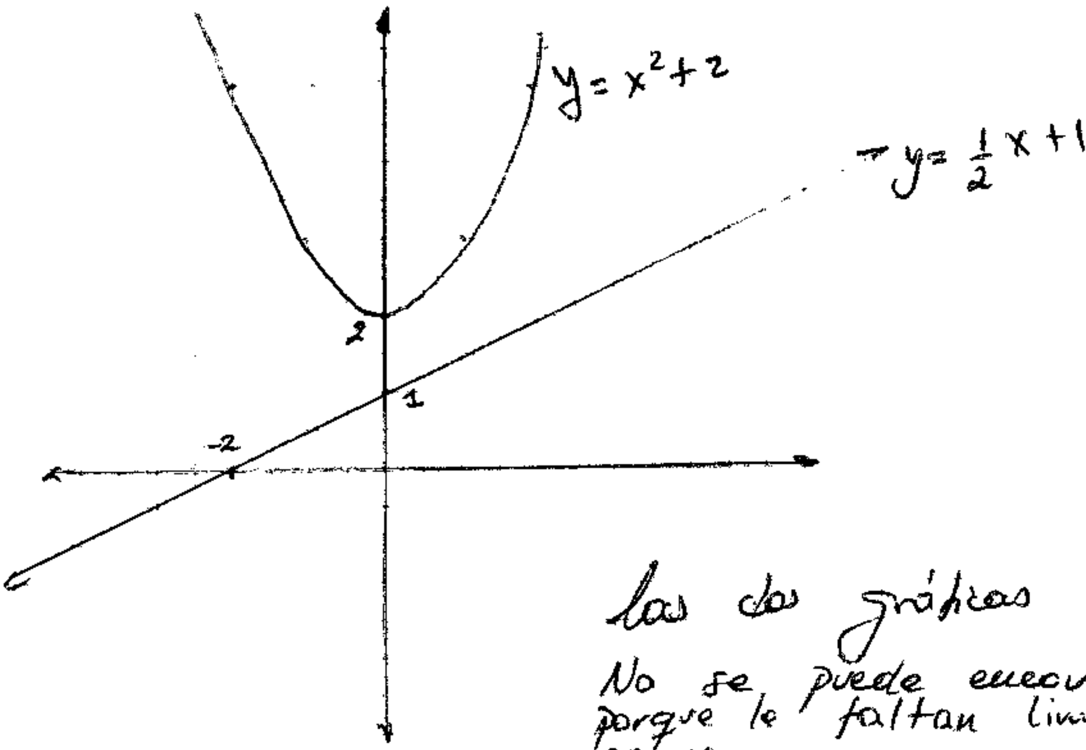
$$a_5 = \frac{-5^3+2}{5^3+2\cdot 5^2+1} = \frac{-123}{176}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^3+2}{n^3+2n^2+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{n^3}{n^3}+\frac{2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}+\frac{2n^2}{n^3}+\frac{1}{n^3}}$$

$$= \frac{-1+0}{1+0+0} = -1$$

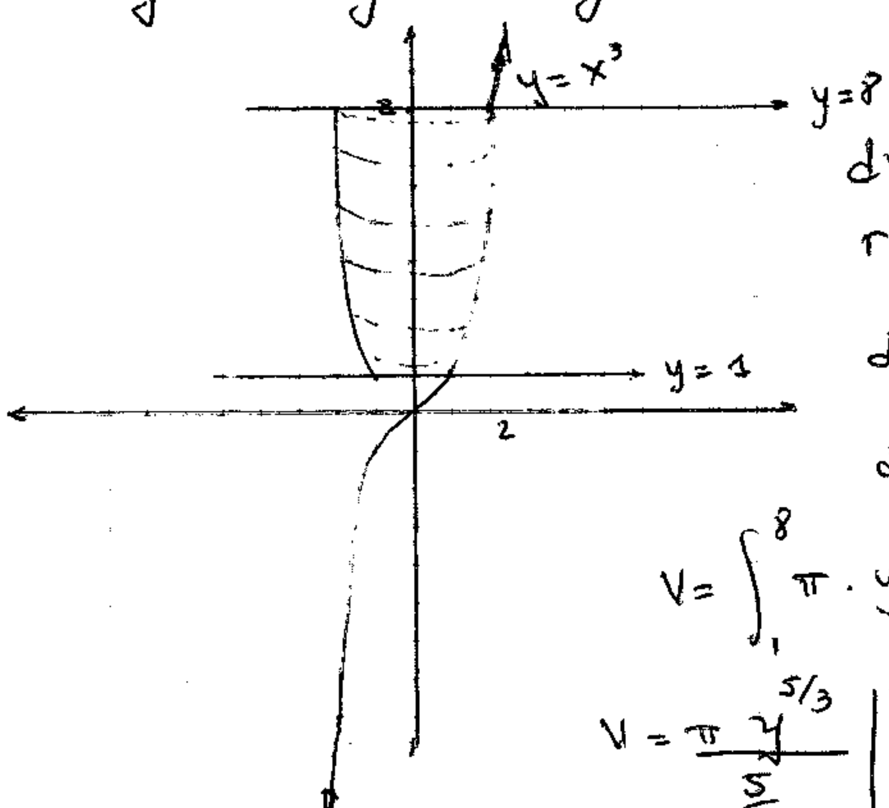
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1 < 1$ Es convergente.

5



las dos gráficas no se cortan.
No se puede encontrar un sólido porque le faltan límites sobre el eje x

6. $y = x^3 \quad y = 8 \quad y = 1.$



$dV = \pi r^2 \cdot dy$

$r = \sqrt[3]{y}$

$dV = \pi (\sqrt[3]{y})^2 dy$

$dV = \pi\, y^{2/3}\, dy$

$V = \int_1^8 \pi \cdot y^{2/3}\, dy$

$V = \dfrac{\pi\, y^{5/3}}{\frac{5}{3}} \Big|_1^8 \Rightarrow V = \frac{3}{5}\pi\, y^{5/3} \Big|_1^8$

$V = \frac{3}{5}\pi\left(8^{5/3} - 1^{5/3}\right) = \frac{3}{5}\pi\,(32 - 1) = \frac{93}{5}\pi$