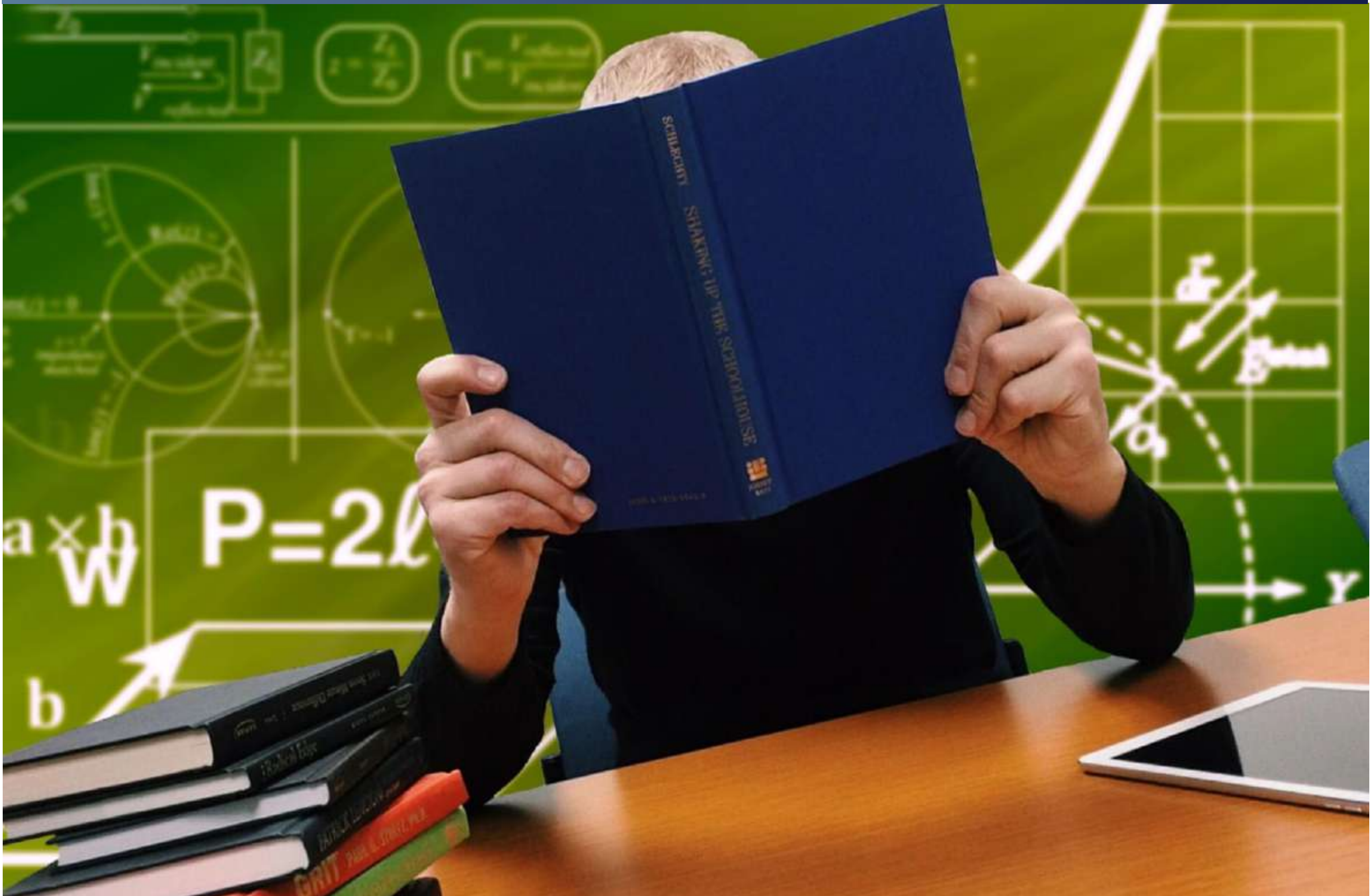
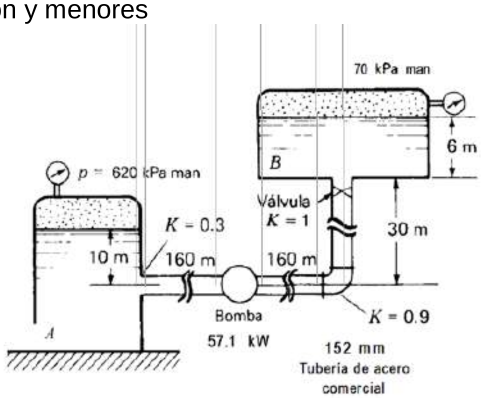
Ejercicios y Talleres



puedes enviarlos a
klasesdematematicasymas@gmail.com

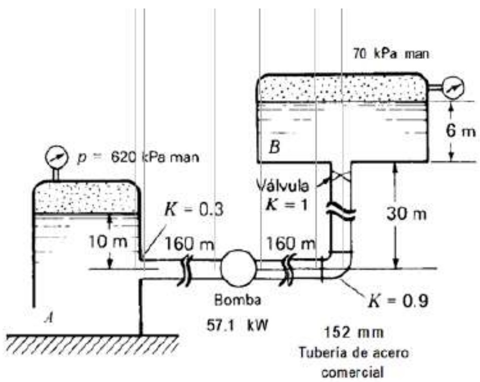
Tarea 4 Hidráulica de los Sistemas a Presión

1:. Cuál es el caudal Q desde A hasta B para el sistema que se muestra? Ignores las pérdidas de energía por fricción y menores



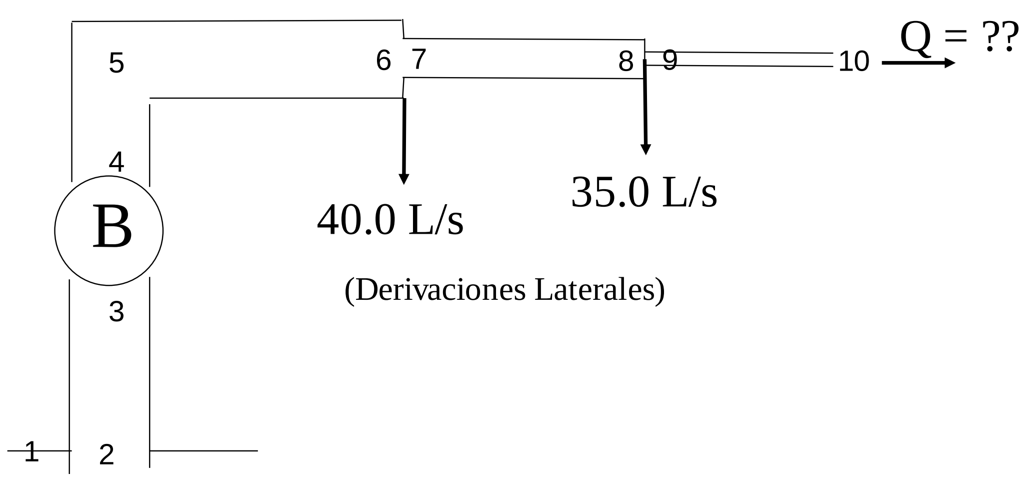
Punto	L. P.	L. E.

2. Cuál es el caudal Q desde A hasta B para el sistema que se muestra? Asuma un valor de f=0.025 Dibuje la línea de energía y la línea piezométrica.



Punto	L. P.	L. E.

3) Una bomba transmite 85 Kw de potencia al flujo de agua en una serie de tres tuberías tal como se muestra en la figura. Para las tres tuberías considere únicamente pérdidas por fricción con f=0.025. Los diámetros de los tramos son D_1= 250 mm, D_2= 200 mm, D_3= 150 mm.



a) Cuál es el caudal que sale por el sistema?

b) Para las tuberías calcule la velocidad, la energía cinética y las pérdidas por fricción

Tubería	Long (m)	Velocidad	EK	hf
1-2	0			
2-3	1.8			
3-4	0			
4-5	2.0			
5-6	300			
6-7	0			
7-8	100			
8-9	0			
9-10	180			

a) Calcule para los puntos señalados, la cabeza de presión (p/γ), la cabeza de energía cinética, la línea piezométrica y la línea de Energía.

Punto	z	p/γ	EK	LP	LE
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Dibuje la línea de Energía y la piezométrica, anotando valores importantes.

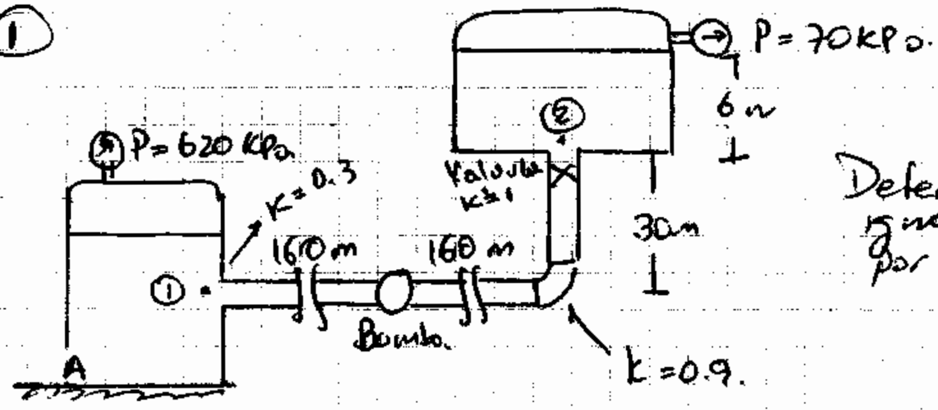
4) Un campo de velocidad está dado por:

$$V = (3x^2 - 3y^2)\vec{i} + (Cxy)\vec{j}$$

Determine:

a. El valor de C para que el flujo sea incompresible (deformación volumétrica igual a cero)
b. Vorticidad.
c. Es el flujo irrotacional?
d. Tensor tasa de deformación
e. La función de corriente

1



Determinar caudal ignorando pérdidas por fricción y menores.

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \frac{V_1^2}{2g} - H_B = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$H_{Bomba} = -\frac{Potencia}{\rho g Q} = -\frac{57100}{\rho g V \cdot A} = -\frac{57100}{1000 \times 9.8 \times V \times \frac{\pi \times 0.152^2}{4}} = \frac{-321{,}0945}{V}$$

Para $P_1 \rightarrow$ Bernoulli entre A y Punto 1

$$\frac{620.000}{1000 \times 9.8} + \cancel{\frac{V_A^2}{2g}}^{0} + 10 = \frac{P_1}{1000 \times 9.8} + \frac{V_1^2}{2g} + 0 \qquad V_1 = V$$

$$\frac{P_1}{1000 \times 9.8} = \frac{620.000}{1000 \times 9.8} - \frac{V_1^2}{2g} + 10 \qquad \frac{P_1}{1000 \times 9.8} = 73{,}25 - 0{,}05102V^2$$

Para $P_2 = P + \rho g h = 70000 + 1000 \times 9.8 \times 6\,m = 128800$ Pa.

Reemplazando

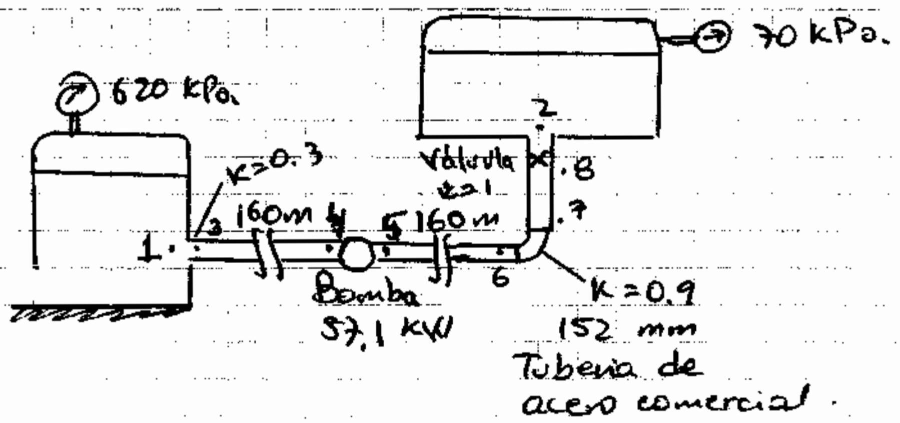
$$73{,}25 - 0.05102V^2 + 0 + \frac{321{,}0945}{V} = \frac{128800}{1000 \times 9.8} + 30$$

Despejando V se tiene. $V = 28{,}4795$ m/s.

El $Q = V \cdot A = 28{,}4795 \times \frac{\pi \times 0{,}152^2}{4} = 0{,}5167\ m^3/s$.

Caudal de A a B = $0{,}5167\ m^3/s$.

(2)



Entre 1 y 2.

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}} - H_B = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}} + H_f + H_m.$$

$$H_{Bomba} = -\frac{Potencia}{\rho g Q} = -\frac{57100}{1000 \times 9.8 \times V \times \frac{\pi \times 0.152^2}{4}} = -\frac{321{,}0945}{V}$$

Para $P_1 \longrightarrow$ Bernoulli entre A y Punto 1

$$\frac{620000}{1000 \times 9.8} + \cancel{\frac{V_A^2}{2g}}^{0} + 10 = \frac{P_1}{1000 \times 9.8} + \frac{V_1^2}{2g} + 0$$

$$\frac{P_1}{1000 \times 9.8} = 73{,}25 - 0.05102V^2. \qquad P_2 = 128800 \text{ Pa}.$$

$$H_f = f\,\frac{L}{D}\,\frac{V^2}{2g} = f \times \frac{(160+160+30)}{0.152} \cdot \frac{V^2}{2 \times 9.8} = f\,(117{,}8168)\,V^2$$

$$H_m = \Sigma K_i \times \frac{V^2}{2g} = (0.3+0.9+1) \times \frac{V^2}{2g} = 2{,}2 \times \frac{V^2}{2g}.$$

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = 30$$

$$73{,}25 - 0.05102V^2 + 0 + \frac{321{,}0945}{V} = \frac{128800}{1000 \times 9.8} + 30 + 117{,}81 f \cdot V^2 + 2{,}2\frac{V^2}{2g}$$

(1) $$73{,}25 - 0{,}05102V^2 + \frac{321{,}0945}{V} = 43{,}1428 + 117{,}81\,fV^2 + 0{,}0612V^2$$

Usando Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0{,}869 \times \ln\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7 \times D} + \frac{2{,}523}{Re \cdot \sqrt{f}}\right)$$

Siendo $Re = \frac{V \cdot D}{\nu}$ con $\nu = 0,113 \times 10^{-5}$

$$Re = \frac{0.152\,V}{0.113 \times 10^{-5}} = 134513,27\,V$$

$\epsilon = 4,6 \times 10^{-5}$ Para acero comercial.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.869 \ln\left(\frac{4,6 \times 10^{-5}}{3,7 \times 0,152} + \frac{2,523}{134513,27 V \cdot \sqrt{f}}\right) \quad (2)$$

Solucionando 1 y 2 a través de iteraciones se tiene.

$f = 0,01578$ $V = 6,3289$ m/s

Caudal de A a B $Q = V \cdot A = 6,3289 \frac{m}{s} \times \frac{\pi (0.152)^2}{4} = 0,1148 \frac{m^3}{s}$

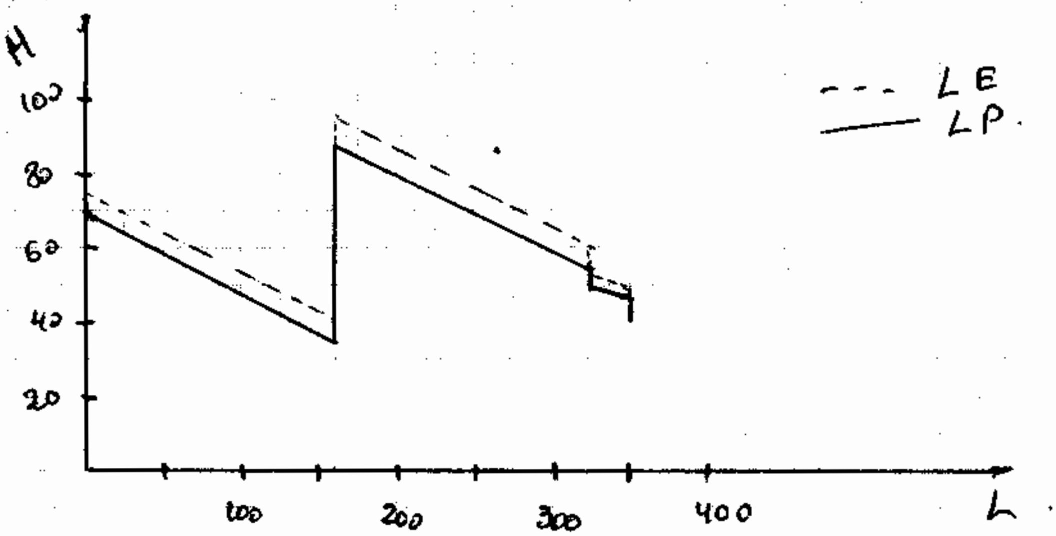
línea de Energía $\frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} - \Sigma$ Perdidas

línea Piezométrica $\frac{P}{\rho g} + z$

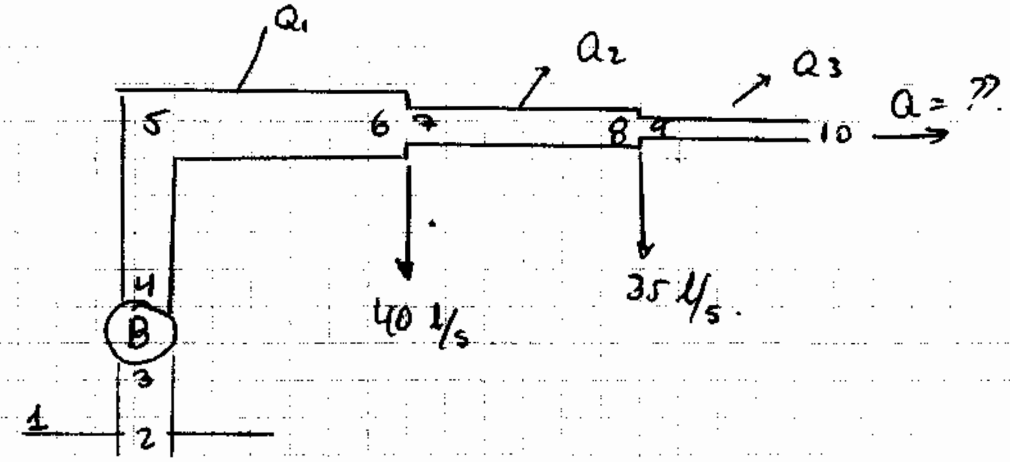
Según los puntos de la figura 1, 2, 3, 4 ... 8.

$\frac{P_1}{1000 \times 9.8} = 73,25 - 0.05102 V^2 = 71,2064$ $H_{bomba} = \frac{321,0945}{6,3289} = 50,73$

Punto	z	LP	LE	
1	0	71,20	73,25	
3	0	70,59	72,63	Pierde con k=0.3
4	0	36,64	38,69	Pierde friccion en 160 m.
5	0	87,38	89,42	La bomba actua
6	0	53,43	55,47	Pierde friccion en otros 160 m.
7	0	51,59	53,64	Pierde por el codo
8	80	45,23	47,27	Pierde por friccion.
2	30	43,18	45,23	Pierde por valvula.


H
100
80
60
40
20
100
200
300
400
L
--- LE
— LP.

3)



Potencia = 85 kw $f = 0{,}025$ $D_1 = 250\,mm$ $D_2 = 200\,mm$
$D_3 = 150\,m.$

$Q_1 = Q_2 + 40\ l/s \qquad Q_2 = Q_3 + 35\ l/s$

$Q_1 = Q_2 + 0{,}04\ m^3/s \qquad Q_2 = Q_3 + 0{,}035\ m^3/s.$

$Q_1 = Q_3 + 0{,}075$

$A_1 = \dfrac{\pi D_1^2}{4} = \dfrac{\pi \times 0.25^2}{4} = 0{,}04908\,m^2 \quad A_2 = \dfrac{\pi D_2^2}{4} = \dfrac{\pi \times 0.2^2}{4} = 0{,}031416\,m^2$

$A_3 = \dfrac{\pi D_3^2}{4} = \pi \times \dfrac{0.15^2}{4} = 0{,}01767\ m^2$

$H_{bomba} = \dfrac{Potencia}{\rho g q} = \dfrac{85000}{1000 \times 9.8 \times Q_1} = -\dfrac{8{,}6734}{Q_1}$

Aplicando Bernoulli entre 1 y 10.

$$\cancel{\frac{P_1}{\rho g}}^{0} + \cancel{Z_1}^{0} + \frac{V_1^2}{2g} - H_B = \cancel{\frac{P_{10}}{\rho g}}^{0} + \cancel{Z_{10}}^{0} + \frac{V_{10}^2}{2g} + \Sigma H_f.$$

$$\frac{V_1^2}{2g} - H_B = \frac{V_{10}^2}{2g} + \Sigma H_f.$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{8{,}6734}{Q_1} = \frac{V_{10}^2}{2g} + H_{f_{2-3}} + H_{f_{4-6}} + H_{f_{7-8}} + H_{f_{9-10}}$$

$$H_{f_{2-3}} + H_{f_{4-6}} = H_{f_{2-6}} = f \frac{L}{D_1} \frac{V_1^2}{2g}.$$

$$= 0{,}025 \times \frac{(1{,}8 + 2 + 300)}{0{,}25} \frac{V_1^2}{2 \times 9.8}$$

$$= 1{,}55\,V_1^2$$

$$Hf_{7-8} = f\frac{L}{D_2}\frac{V_2^2}{2g} = 0{,}025 \times \frac{100}{0{,}20} \times \frac{V_2^2}{2 \times 9.8} = 0{,}6377\, V_2^2$$

$$Hf_{9-10} = f \cdot \frac{L}{D_3}\frac{V_3^2}{2g} = 0{,}025 \times \frac{180}{0{,}15} \times \frac{V_3^2}{2 \times 9.8} = 1{,}5306\, V_3^2$$

Retomando Bernoulli

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{8{,}6734}{Q_1} = \frac{V_3^2}{2g} + 1{,}55 V_1^2 + 0{,}6377 V_2^2 + 1{,}5306 V_3^2 \quad (1)$$

Adicionalmente $V_3 = \frac{Q_3}{A} \Rightarrow Q_3 = V_3 \cdot A$

$$Q_3 = \frac{\pi \times 0.15^2}{4} V_3$$

$$Q_3 = 0{,}01767\, V_3$$

$Q_2 = A_2 V_2 = 0{,}03141\, V_2$ $\quad Q_1 = A_1 \cdot V_1 = 0{,}04908\, V_1$

$Q_1 = Q_2 + 0{,}04$ $\quad 0{,}04908 V_1 = 0{,}03141 V_2 + 0.04 \quad (2)$

$Q_2 = Q_3 + 0.035$ $\quad 0{,}03141 V_2 = 0.01767 V_3 + 0{,}035 \quad (3)$

Tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Solucionándolo se tiene.

$V_1 = 3{,}1586$ m/s $\quad V_2 = 3{,}6621$ m/s $\quad V_3 = 4{,}5289$ m/s

$Q_1 = 0{,}04908 \times 3{,}1586 = 0{,}1550$ m³/s.

$Q_2 = 0{,}03141 \times 3{,}6621 = 0{,}1150$ m³/s

$Q_3 = 0{,}01767 \times 4{,}5289 = 0{,}0800$ m/s

El caudal que sale por el sistema es de 80 l/s.

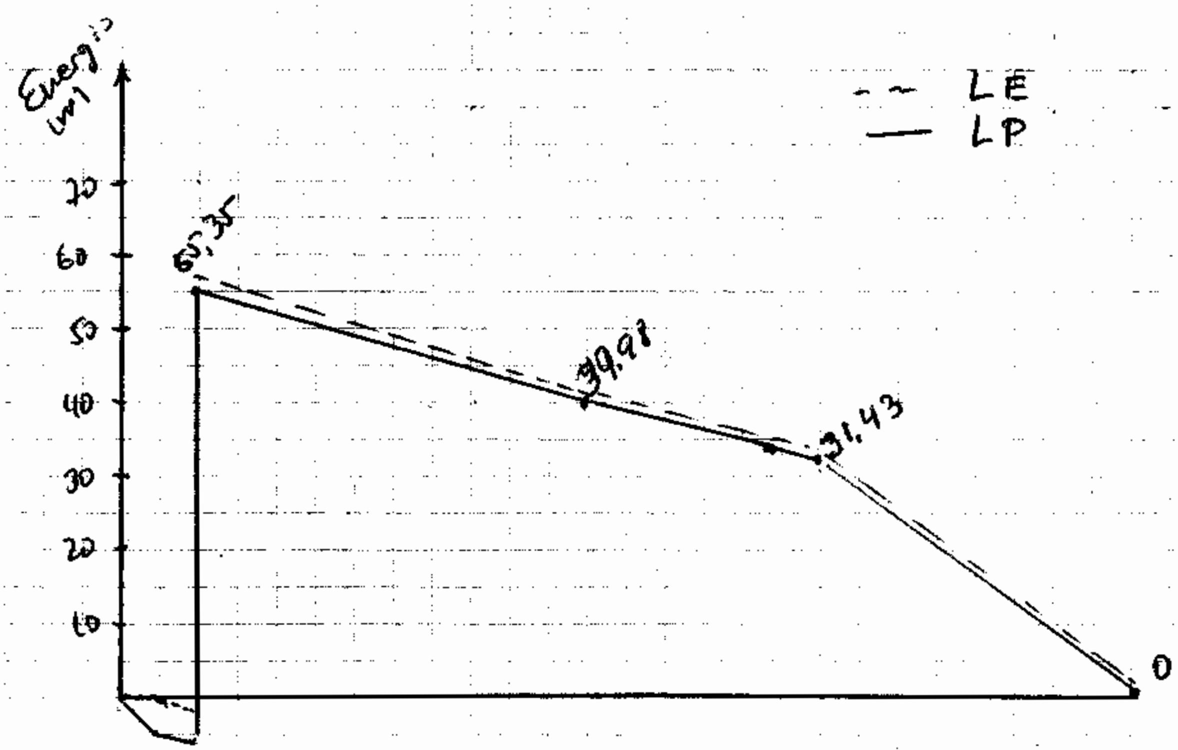
b)

Tubería	long	Velocidad	EK	hf
1 - 2	0	0	0	0.
2 - 3	1.8	3,1586	0,5090	0,09162
3 - 4	0			
4 - 5	2	3,1586	0,5090	0,1018
5 - 6	300	3,1586	0,5090	15,27055
6 - 7	0			
7 - 8	100	3,6621	0,6842	8,5529
8 - 9	0			
9 - 10	180	4,5289	1,0464	31,3942

$E = \frac{V^2}{2g}$ $h_f = 0{,}025 \times \frac{L}{D} \times \frac{V^2}{2g}$.

c)

Punto	z	P/γ	E	$P/\gamma + z$ LP	LP+E LE
1	0	0	0	0	0
2	0	−0,5090	0,5090	−0,5090	0
3	0	−0,6006	0,5090	−0,6006	−0,0916
4	0	55,3567	0,5090	55,3567	55,8657
5	0	55,2549	0,5090	55,2549	55,7639
6	0	39,9844	0,5090	39,9844	40,4934
7	0	39,9844	0,6842	39,9844	40,6686
8	0	31,4315	0,6842	31,4315	32,1157
9	0	31,4315	1,0464	31,4315	32,4779
10	0	0	1,0464	0	1,0464



4) $V = (3x^2 - 3y^2)\hat{i} + (c\,xy)\hat{j}$.

a) Valor de C para que el flujo sea incompresible.

Razón de deformación volumétrica es:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$u = (3x^2 - 3y^2) \qquad v = c\,xy \qquad w = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = Cx \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = 6x + Cx = 0$$

$$6 + C = 0 \qquad C = -6$$

$$V = (3x^2 - 3y^2)\hat{i} - 6xy\,\hat{j}$$

b) Vorticidad

$$\zeta = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \operatorname{rot}(\vec{V})$$

$$\zeta = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$u = 3x^2 - 3y^2 \qquad v = -6xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6y \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -6y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -6x \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\zeta = (0 - 0)\hat{i} + (0 - 0)\hat{j} + (-6y - (-6y))\hat{k}$$

$$\zeta = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

c) ¿Es el flujo irrotacional? Si es irrotacional ya que el vórtice es cero en sus componentes.

d) Tensor tasa de deformación

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 6x \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = cx = -6x$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(-6y + -6y\right) = \frac{1}{2}\left(-12y\right) = -6y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -6y$$

$$\varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xy} = -6y.$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 6x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$$

e) La función línea de corriente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-6xy}{3x^2 - 3y^2}.$$

$$(3x^2 - 3y^2)\,dy = -6xy\,dx$$

$$6xy\,dx + (3x^2 - 3y^2)\,dy = 0$$ Es una ecuación homogenea

$$y = u\cdot x \qquad dy = u\,dx + x\,du$$

$$6x(ux)\,dx + (3x^2 - 3(ux)^2)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$6ux^2\,dx + (3x^2 - 3u^2x^2)(u\,dx + x\,du) = 0$$

$$6ux^2\,dx + 3ux^2\,dx + 3x^3\,du - 3u^3x^2\,dx - 3u^2x^3\,du = 0$$

$$x^2(6u + 3u - 3u^3)\,dx + x^3(3 - 3u^2)\,du = 0$$

$$(9u - 3u^3)\,dx + 3x(1 - u^2)\,du = 0$$

$$(9u - 3u^3)\,dx = -3x(1 - u^2)\,du$$

$$\cancel{3}(3u - u^3)\,dx = -\cancel{3}x(1 - u^2)\,du$$

$$(3u - u^3)\,dx = -x(1-u^2)\,du$$

$$\int \frac{dx}{-x} = \int \frac{1-u^2}{3u-u^3}\,du$$

$$-\ln x = \int \frac{1-u^2}{u(3-u^2)}\,du$$

$$\int \frac{1-u^2}{u(3-u^2)}\,du = \frac{1}{3}\ln\left(u(u^2-3)\right)$$

$$-\ln x = \frac{1}{3}\ln[u(u^2-3)] + c$$

$$e^{-\ln x} = e^{1/3 \ln[u^3-3u] + c}$$

$$x^{-1} = (u^3-3u)^{1/3} \cdot c$$

$$c = (u^3-3u)^{1/3} \cdot x$$

$y = u \cdot x \qquad u = y/x$

$$c = \left((y/x)^3 - 3(y/x)\right)^{1/3} \cdot x \longrightarrow \text{Función de Corriente.}$$