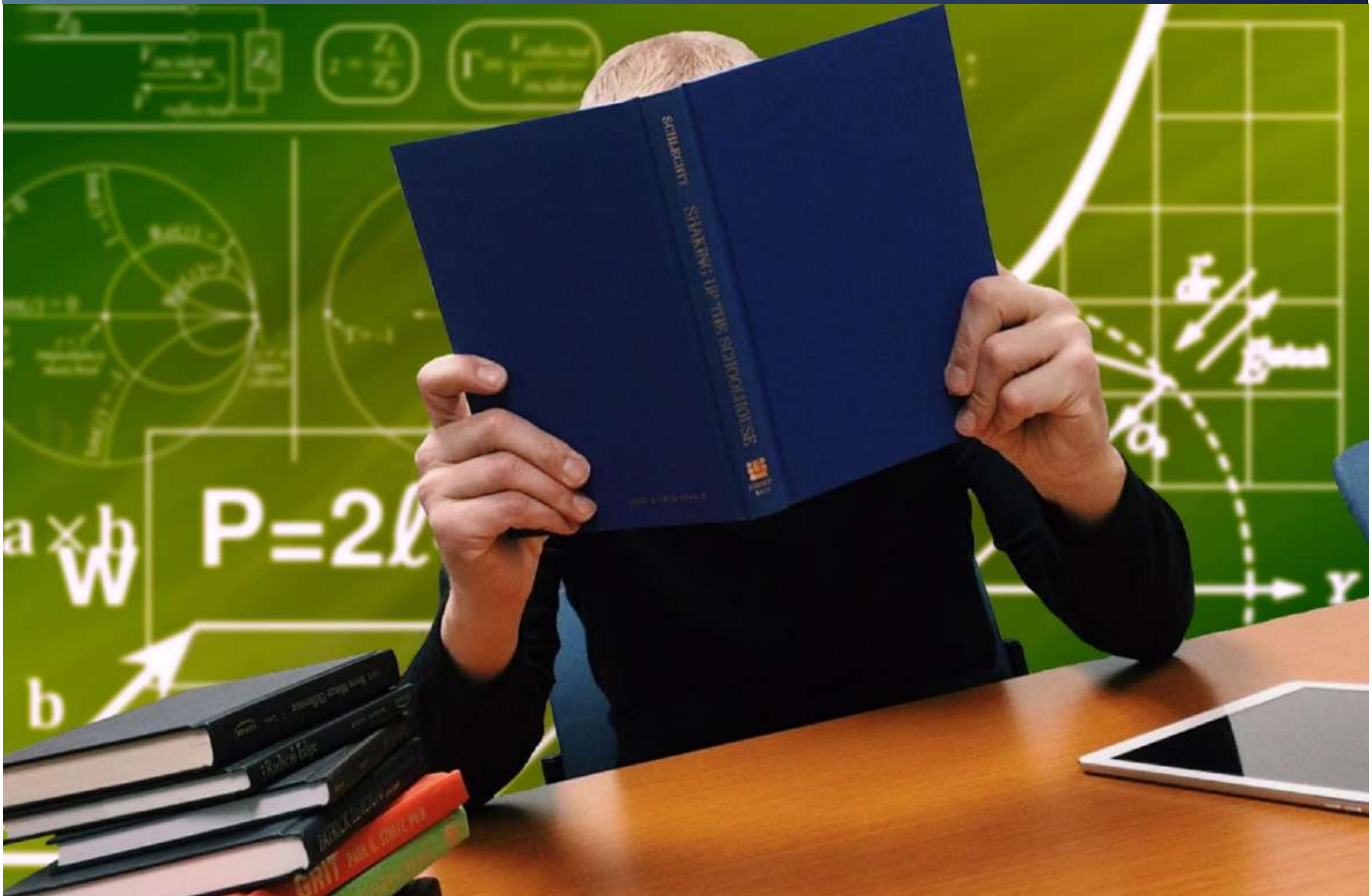
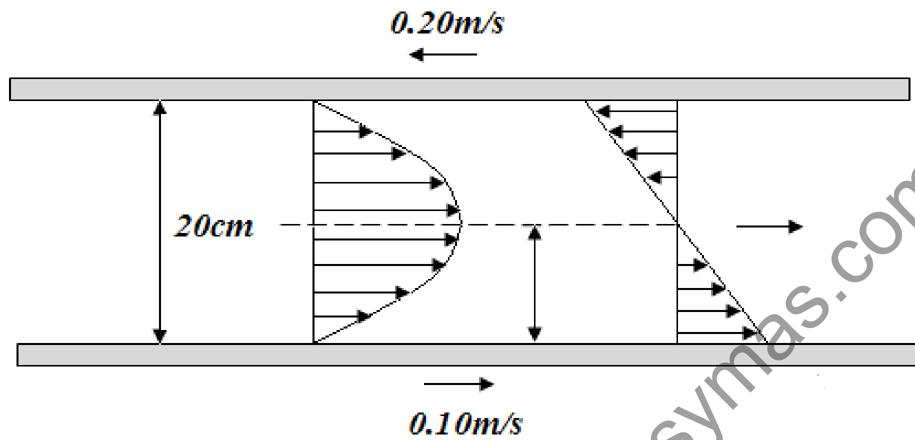
# *Ejercicios y Talleres*

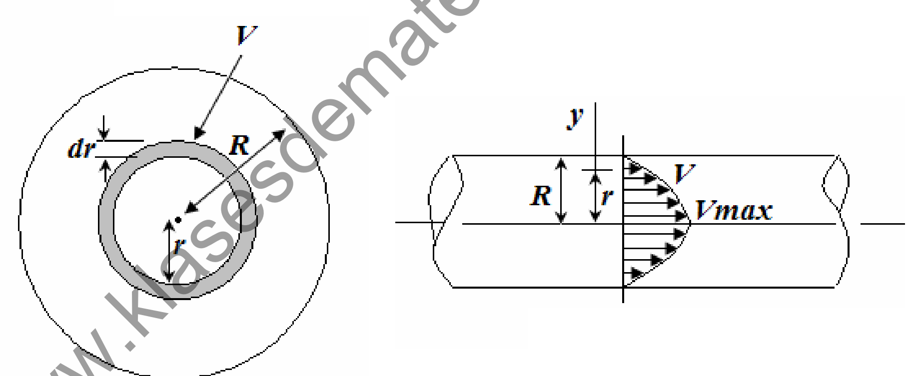



puedes enviarlos a
klasesdematematicasymas@gmail.com

1. Entre dos placas paralelas separadas 10 cm, fluye un gasto de 10 lps/m, la placa superior se mueve a 0.20 m/s en sentido contrario al flujo y la inferior en el mismo sentido a 0.10 m/s. Calcule el esfuerzo cortante máximo y la velocidad máxima. El fluido es el aceite con SG =0.93 y viscosidad $10^{-2}$ Kg s/$m^2$.




2. Determine el caudal que pasa por la tubería cuya distribución de velocidades que se muestra y que sigue la siguiente ley: $v=V(y/r)^{1/7}$, donde V es 3m/s y R es 0,15 m.



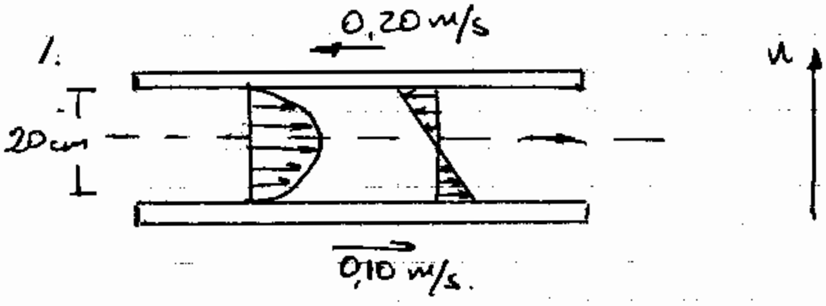



3. Un canal trapezoidal tiene un ancho de 0,40 m, las pendiente de las paredes son de 1 sobre 1 y transporta un caudal de 1 m3/s. el nivel aguas arriba del resalto es 0,30m. Hallar la altura del resalto y la pérdida de energía en este tramo.

4. Dibujar la curva de energía específica para un canal rectangular de ancho 10 m que transporta Q = 50 m3/s. Determinar a) la profundidad critica, b) la energía especifica mínima, c) la profundidad alterna correspondiente a una profundidad de 1,50 m.

5. Por un canal riego de forma trapezoidal circulan 1500 l/s, si el ancho del canal es 4,5 m, y el talud es 1:1, determine la energía específica y tipo de régimen se presenta en cada profundidad, para las siguientes profundidades que presenta el canal en tiempo de verano (0,50, 1,00, 1,50).

1.




$n$ = profundidad.

Como las placas se mueven a velocidades distintas no se produce simetria en el flujo.

Esfuerzo cortante $\tau = \gamma \frac{dh}{ds} \cdot n + C$

además $\tau = \mu \frac{dv}{dn}$ y se reemplaza, se tiene

$$\mu \frac{dv}{dn} = \gamma \cdot \frac{dh}{ds} \cdot n + C$$

Despejando $dv$ $\quad dv = \left(\gamma \frac{dh}{ds} \cdot n + C\right) \frac{dn}{\mu}$

$$dv = \gamma \frac{dh}{ds} \cdot dn \cdot n + \frac{C}{\mu} \cdot dn \qquad v = \int \gamma \frac{dh}{ds} \cdot n\, dn + \int \frac{C}{\mu}\, dn$$

$$v = \frac{\gamma}{\mu} \frac{dh}{ds} \cdot \frac{n^2}{2} + \frac{C \cdot n}{\mu} + C_1$$

los valores de $C$ y $C_1$ se pueden determinar con las condiciones de contorno

$V = 0{,}10$ para $n = 0$
$V = -0{,}20$ para $n = 20$ cm $\quad n = 0{,}2$

$V(0) = 0{,}10$

$$v = \frac{\gamma}{\mu} \frac{dh}{ds} \cdot \frac{0^2}{2} + \frac{C \cdot 0}{\mu} + C_1 = 0{,}10 \qquad \text{Por tanto } C_1 = 0{,}10$$

$V(0{,}2) = -0{,}2$

$$-0.2 = \frac{\gamma}{\mu} \frac{dh}{ds} \cdot \frac{(0.2)^2}{2} + \frac{C \cdot (0.2)}{\mu} + 0{,}1$$

Con $\gamma = 0{,}93 \times 1000 = 930 \qquad \mu = 10^{-2}$

$$-0.2 = \frac{930}{10^{-2}} \times \frac{dh}{ds} \times \frac{0.2^2}{2} + \frac{0.2C}{10^{-2}} + 0.1$$

$$-0.2 = 1860\,\frac{dh}{ds} + 20C + 0.1$$

$$-0.3 = 1860\,\frac{dh}{ds} + 20C \qquad 20C = -0.3 - 1860\,\frac{dh}{ds}$$

$$C = \frac{-0.3 - 1860\frac{dh}{ds}}{20} \qquad C = -0{,}015 - 93\,\frac{dh}{ds}$$

Con $C_1 = 0{,}1$ y $C = -0{,}015 - 93\,\frac{dh}{ds}$ se tiene

$$U = \frac{\gamma}{\mu}\cdot\frac{dh}{ds}\cdot\frac{n^2}{2} + \frac{C\cdot n}{\mu} + C_1$$

$$U = \frac{0{,}93\times 1000}{10^{-2}}\;\frac{dh}{ds}\cdot\frac{n^2}{2} + \frac{\left(-0.015 - 93\frac{dh}{ds}\right)n}{10^{-2}} + 0{,}1$$

$$V = 46500\,\frac{dh}{ds}\cdot n^2 - 1.5n - 9300\,\frac{dh}{ds}\cdot n + 0.1$$

$\text{Gasto} = 10\ lps/m \qquad q = 10\ lps = 0.01\ m^3/s/m.$

$dq = v\,dA$ con $dA = b\,dn$ se asume $b = 1m.$

$$dA = dn$$

$$dq = \left(46500\,\frac{dh}{ds}\cdot n^2 - 1.5n - 9300\,\frac{dh}{ds}\cdot n + 0.1\right)dn.$$

$$q = \int_0^{0.20}\left(46500\,\frac{dh}{ds}\cdot n^2 - 1.5n - 9300\,\frac{dh}{ds}\cdot n + 0.1\right)dn = 0{,}01$$

$$46500\,\frac{dh}{ds}\cdot\frac{n^3}{3} - \frac{1.5n^2}{2} - 9300\,\frac{dh}{ds}\cdot\frac{n^2}{2} + 0.1n\Big|_0^{0.20} = 0{,}01$$

$$46500\,\frac{dh}{ds}\cdot\frac{(0.2)^3}{3} - \frac{1.5(0.2)^2}{2} - 9300\,\frac{dh}{ds}\cdot\frac{0.20^2}{2} + 0.1\times 0.2 = 0.01$$

$$124\,\frac{dh}{ds} - 0.03 - 186\,\frac{dh}{ds} + 0.02 = 0.01$$

$$-62\,\frac{dh}{ds} - 0.01 = 0.01 \qquad -62\,\frac{dh}{ds} = 0{,}02$$

$$\frac{dh}{ds} = \frac{-0.02}{62} = -3{,}22\times 10^{-4}$$

Ya se puede completar la ecuación de velocidad

$$V = 46500 \frac{dh}{ds} \cdot n^2 - 1.5n - 9300 \frac{dh}{ds} \cdot n + 0.1$$

$$V = 46500 \cdot (-3{,}22 \times 10^{-4})\, n^2 - 1.5n - 9300 \cdot (-3{,}22 \times 10^{-4})\, n + 0.1$$

$$V = -15n^2 - 1.5n + 3n + 0.1$$

$$V = -15n^2 + 1.5n + 0.1$$

la velocidad será máxima en $\frac{dv}{dn} = 0$

$$\frac{dv}{dn} = -30n + 1.5 = 0$$

$$n = \frac{1.5}{30} \qquad n = 0{,}05$$

en una altura de 0,05 m se tiene la velocidad máxima

$$V = -15(0.05)^2 + 1.5(0.05) + 0.1$$

$$V = 0{,}14 \text{ m/s} \rightarrow \text{Velocidad máxima}$$

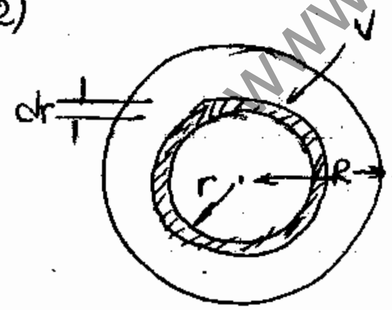
$$\tau = \mu \left(\frac{dv}{dn}\right)_{max} \qquad \frac{dv}{dn} = -30 \cdot n + 1.5$$

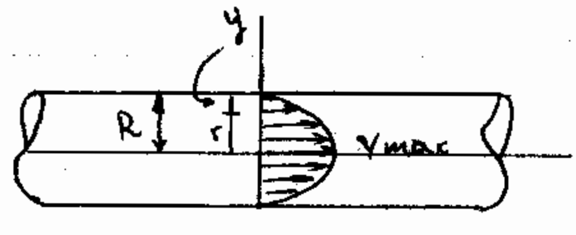
Pero es máxima para $n = 0{,}2$ m

$$\tau = 10^{-2} \cdot (-30 \times 0.2 + 1.5)$$

$$\tau = -0{,}045 \text{ Kg/m}^2 \rightarrow \text{Esfuerzo cortante máximo.}$$

2)




$v = V(y/r)^{1/7}$ en donde $V = 3$ m/s $R = 0{,}15$ m

$$r = R - y \rightarrow dr = -dy$$

Además

$dq = v \cdot dA$ con $dA = 2\pi r\,dr$

$dq = v \cdot 2\pi r\,dr$ como $v = V\left(y/R\right)^{1/7}$

$dq = V \cdot \left(y/R\right)^{1/7} \cdot 2\pi r\,dr$ $\quad r = R - y \quad dr = -dy$

$$dq = V \cdot \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} \cdot 2\pi \cdot (R-y)\,(-dy)$$

$$\int dq = -\int_{0.15}^{0} V \cdot \frac{y^{1/7}}{R^{1/7}} \cdot 2\pi \cdot (R-y)\,dy$$

$$q = \int_0^{0.15} \frac{V \cdot 2\pi}{R^{1/7}} \cdot \left(y^{1/7}R - y^{8/7}\right) dy = \int_0$$

$$q = \frac{V \cdot 2\pi}{R^{1/7}} \cdot \int_0^{0.15} \left(y^{1/7}R - y^{8/7}\right) dy$$

$V = 3 \quad R = 0.15$

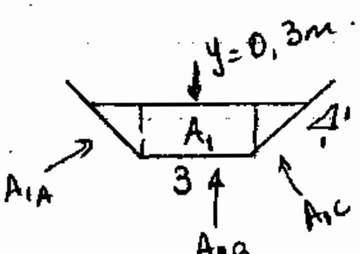
$$q = \frac{3 \times 2 \cdot \pi}{(0.15)^{1/7}} \cdot \left(\frac{7}{8} y^{8/7} \cdot R - \frac{7 y^{15/7}}{15}\right|_0^{0.15}$$

$$q = \frac{3 \times 2 \cdot \pi}{0.15^{1/7}} \cdot \left(\frac{7}{8}(0.15)^{8/7} \cdot 0.15 - \frac{7}{15}\, 0.15^{15/7}\right)$$

$q = 0{,}172\ m^3/s$

3) Canal trapezoidal de ancho 0,40 m
Pendiente 1 sobre 1.
$q = 1\ m^3/s$.

$y = 0{,}30\ m$




$A_1 = (b + my)\,y$

$A_1 = (3 + 0.3 \times 1) \times 0.3$

$A_1 = 0{,}99\ m^2$.

Ancho superficial $= 3 + 2 \times 0.3 = 3{,}6\ m$.

Profundidad hidraulica $D = \frac{A}{B} = \frac{0,99}{3,6} = 0,275\ m.$

Velocidad media $V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{1\ m^3/s}{0,99\ m^2} = 1,01\ m/s$

Número de Froude $FR_1 = \frac{V_1}{\sqrt{gD}} = \frac{1,01}{\sqrt{9,81 * 0,275}} = 0,6149$

$FR < 1$ El flujo es subcrítico.

Para $y_{c_1}$ se tiene

$$A_1 y_{c_1} = A_{1A} \cdot \frac{0,3}{3} + A_{1B} * \frac{0,3}{2} + A_{1C} * \frac{0,3}{3}$$

$$0,99 \cdot y_{c_1} = \frac{0,3 * 0,3}{2} * \frac{0,3}{3} + 3 * 0.3 * \frac{0.3}{2} + \frac{0.3 * 0,3}{2} * \frac{0.3}{3}$$

$$0,99\ y_{c_1} = 0,009 + 0,135$$

$$0,99\ y_{c_1} = 0,144$$

$$y_{c_1} = 0,145\ m$$

La Presion en el centroide es $9801 \frac{N}{m^3} * 0,145 m = 1421,14$

Por tanto $P_{1c} \cdot A_1 + \mu Q V_1 = P_{2c} \cdot A_2 + \mu Q V_2$

$$1421,14 * 0,99 + 1000 * 1 * 1,01 = P_{2c} \cdot A_2 + \mu Q V_2$$

$$2416,92 = P_{2c} A_2 + \mu Q V_2.$$

Como $V_2 = \frac{Q}{A_2}$

$$P_{2c} A_2 + \mu Q \cdot \frac{Q}{A_2} = 2416,92$$

$$P_{2c} A_2 + \frac{\mu Q^2}{A_2} = 2416,92.$$

Para $Y_{c_2}$ se tiene.

~~$A_2 y_{c_2} = A_{2A} \frac{0,3}{3} A$~~

$$A_2 y_{c_2} = A_{2A} \cdot \frac{y_2}{3} + \frac{3 * y_2^2}{2} + A_{2C} \cdot \frac{y_2}{3}$$

$$A_2 y_{c_2} = \frac{y_2^3}{2 \cdot 3} + \frac{3 y_2}{2} + \frac{y_2^3}{2 \cdot 3}$$

$$A_2 y_{c_2} = \frac{y_2^3}{3} + \frac{3y_2^2}{2}$$

$$y_{c_2} = \frac{\frac{y_2^3}{3} + \frac{3y_2^2}{2}}{A_2}$$

$$P_{2c} = 9801 * y_{c_2}$$

$$P_{2c} A_2 + \frac{\rho Q^2}{A_2} = 2416,92$$

$$9801 * \frac{y_2^3/3 + 3y_2^2/2}{\cancel{A_2}} \cdot \cancel{A_2} + \frac{1000 * 1^2}{3y_2 + y_2^2} = 2416,92$$

$$9801 \left( \frac{y_2^3}{3} + \frac{3y_2^2}{2} \right) + \frac{1000}{3y_2 + y_2^2} = 2416,92.$$

Despejando $y_2 = 0,1542$ m. $\rightarrow$ Es menor. (Una solución)

$$V_2 = \frac{Q}{by_2 + y_2^2} = \frac{1}{3*0.1542 + 0.1542^2} = 2,05601 \text{ m/s}$$

Ancho Superficial $= 3 + 2*0,1542 = 3,3084$ m.

Area $= 3*0,1542 + 0,1542^2 = 0,4863.$

Profundidad hidráulica $D_2 = \frac{A}{B} = \frac{0,4863}{3,3084} = 0,1469$

Número de Froude $FR_2 = \frac{V_2}{\sqrt{g \cdot D_2}} = \frac{2,05601}{\sqrt{9.81 * 0,1469}} = 1,71$

Pérdida de Energía $= \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1 y_2} = \frac{(0.30 - 0,1542)^3}{4*0.30*0.1542}$

$$\Delta E = 0,0167 \text{ m}.$$

Sin embargo otra solución es $y = 0,299 \approx 0,30$ m lo que no produciría resalto hidráulico, lo que se explicaría a partir del Número de Froude $FR_1 = 0,61 < 1$ el flujo es subcrítico y es tranquilo.

4 $b = 10\ m$
$Q = 50\ m^3/s$

Energía Específica $\Rightarrow$ $E = y + \dfrac{V^2}{2g}$

$V = \dfrac{Q}{A}$ $\qquad E = y + \dfrac{Q^2}{2gA^2}$

$A = b \cdot y$ $\qquad E = y + \dfrac{Q^2}{2g(b \cdot y)^2}$ $\qquad E = y + \dfrac{Q^2}{2gb^2 \cdot y^2}$

Reemplazando

$E = y + \dfrac{50^2}{2 * 9.8 * 10^2 y^2}$ $\qquad E = y + \dfrac{1{,}27551}{y^2}$

$\dfrac{dE}{dy} = 1 + \dfrac{1{,}27551}{y^3} \cdot (-2) = 0$

$\dfrac{2{,}551020}{y^3} = 1$ $\qquad y^3 = 2{,}551020$

$y = \sqrt[3]{2{,}551020}$ $\qquad y = 1{,}366379\ m.$

a) Profundidad Crítica $y = 1{,}36\ m.$

b) Energía mínima $E = 1{,}36\ m + \dfrac{1{,}27551}{1{,}366379^2} = 2{,}0488\ m$

c) Si $y = 1{,}50$ $\quad E = 1{,}50 + \dfrac{1{,}27551}{1{,}50^2} = 2{,}0668\ m$

Para la profundidad alterna se soluciona.

$y + \dfrac{1{,}27251}{y^2} = 2{,}0668$

Despejando $y$ se tiene $y = 1{,}2473\ m.$

La profundidad alterna de $y = 1{,}5$ es $y = 1{,}2473.$

5) $Q = 1500\ l/s = 1{,}5\ m^3/s$

$b = 4{,}5 \quad m = 1$

Energía Específica $E = y + \frac{V^2}{2g}$

$Area = (b + my)\cdot y = (4{,}5 + 1\cdot y)\cdot y = 4.5y + y^2$

$V = \frac{Q}{A} \qquad V = \frac{1{,}5}{4{,}5y + y^2}$

$E = y + \frac{\left(\frac{1{,}5}{4{,}5y+y^2}\right)^2}{2\cdot 9.8} \qquad E = y + \frac{0{,}114795}{(4.5y + y^2)^2}$

Si $y = 0{,}5 \qquad E = 0.5 + \frac{0{,}114795}{(4.5\cdot 0.5 + 0.5^2)^2} = 0{,}510067$

Si $y = 1.0 \qquad E = 1{,}0 + \frac{0.114795}{(4.5\cdot 1{,}0 + 1{,}0^2)^2} = 1{,}0014$

Si $y = 1.5 \qquad E = 1.5 + \frac{0.114795}{(4.5\cdot 1.5 + 1.5^2)^2} = 1{,}5004$

Para la profundidad crítica $\frac{dE}{dy} = 0$

$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{1.032110}{(4.5+4.5y)^3\cdot y^2} - \frac{0.229357}{(4.5+4.5y)^2\cdot y^3} = 0$

Solucionando $y_c = 0{,}2087$

Por tanto $y = 0.5$ $y = 1.0$ $y = 1.5$ estan por encima del punto crítico por tanto el flujo en los tres casos es subcrítico