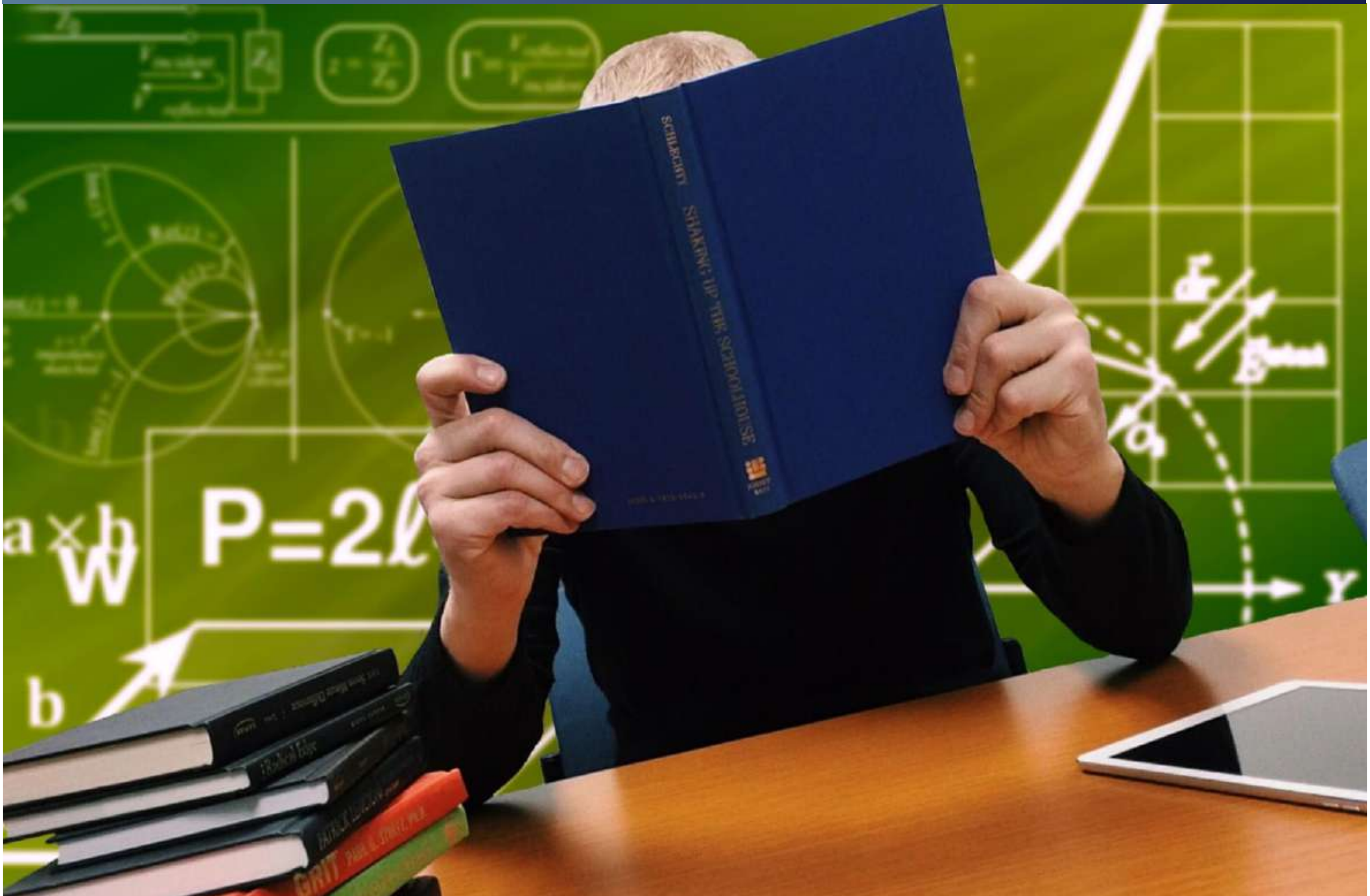
Ejercicios y Talleres



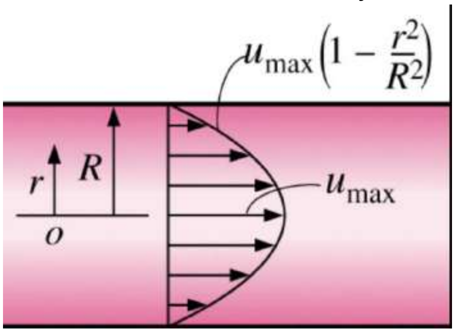
puedes enviarlos a
klasesdematematicasymas@gmail.com

Primera tarea Hidráulica de Sistemas a Presión.

1) En las regiones alejadas de la entrada, en la zona totalmente desarrollada, el perfil de velocidades del flujo laminar en una tubería circular es unidimensional y se puede aproximar como:

$$u[r] = \mathrm{Umax}(1 - \frac{r^2}{R^2})$$

Donde ***R*** es el radio de la tubería y ***r*** es la distancia radial desde el centro de la tubería y ***Umax*** es la velocidad máxima del flujo, la cual se obtiene en el centro. Obtenga

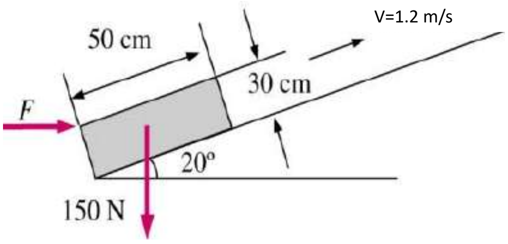


a) Una relación para la resistencia al movimiento debida al fluido en una sección de Longitud ***L***

b) El valor de la fuerza al movimiento para Agua con R=0.08m, L=30 m, Umax= 3 m/s y viscosidad μ = 0.001 kg/(m . s)

c) Valor de la diferencia de presiones para mantener el movimiento

2) Un bloque de 50 cm de largo, 30 cm de alto y 25 cm de ancho que pesa 150 N se mueve con una velocidad constante de 1.2 m/s sobre una superficie inclinada.



a) Determine la fuerza necesaria a aplicar en la dirección horizontal si el movimiento se realiza con fricción sólido- sólido. Tome el coeficiente de fricción de 0.27.

b) Determine el porcentaje de reducción en la fuerza necesaria, si entre el bloque y la superficie inclinada se aplica una película de aceite con una viscosidad de 0.01 $\frac{Kg}{m\,s}$ de 0.35 mm de espesor.

c) Encuentre la Ecuación general de movimiento, con la película de aceite, a partir del punto cuando se deja de aplicar la fuerza Horizontal

d) Para las condiciones en c), plantee y resuelva la ecuación diferencial que describe la velocidad del bloque en función del tiempo.

e) Encuentre el valor de la velocidad para t = 0.15 s.

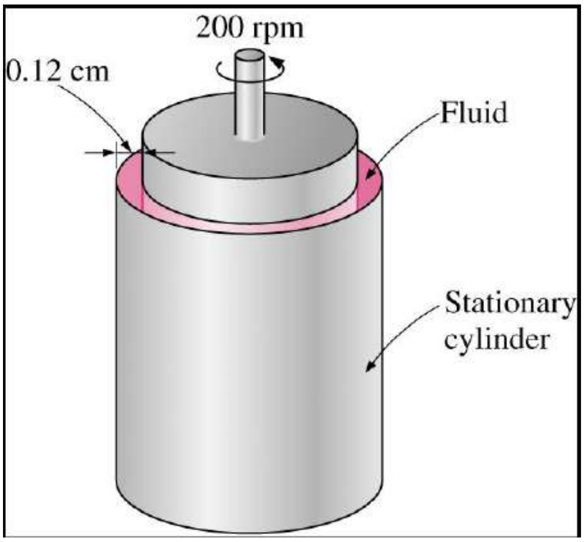
f) Llegará a cero la velocidad del bloque?

g) Encuentre el desplazamiento en función del tiempo Integrando la solución obtenida en d)

h) Encuentre el desplazamiento máximo. (en la dirección hacia arriba del bloque)

i) Encuentre la velocidad terminal del bloque

3) Se va a medir la viscosidad de un cilindro con un viscosímetro construidos con dos cilindros concéntricos de 75 cm de largo. El diámetro exterior del cilindro interior (que es de acero DR=7.6) es de 15 cm y la separación entre los dos cilindros es de 0.12 cm.



a) Encuentre expresiones para la fuerza y el torque de fricción en las paredes

b) Encuentre la ecuación general que describe el movimiento completo del cilindro interno. Ignore los efectos del fondo del viscosímetro. Busque en tablas el momento de Inercia.

c) Encuentre la viscosidad del líquido cuando se hace girar el cilindro interior a 200rpm y se mide un torque de 0.8 N m. Ignore los efectos del fondo.

d) Para los datos de la parte c, si se deja de aplicar el Torque, que tiempo tarda el cilindro interior en llegar al 10% de la velocidad angular inicial? . Ignore los efectos del fondo.

e) Encuentre expresiones para el torque de fricción en el fondo

f) Encuentre la ecuación general que describe el movimiento completo del cilindro interno teniendo en cuenta el fondo.

g) Encuentre la viscosidad del líquido teniendo en cuenta los efectos del fondo.

4) Gracias al fenómeno de capilaridad, las plantas pueden "transportar" el agua desde sus raíces hasta su copa por pequeños conductos ubicados en su tallo. Determinar la altura máxima que un árbol puede elevar el agua por un conducto de 0.004 mm de diámetro, sabiendo que σ= 0.073 N/m y forma un ángulo con la vertical de 15° .

1. la velocidad está dado por

$u[r] = u_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ siendo R el radio del tubo
· r es la distancia radial del centro al tubo

El flujo es en una dimensión, y suponemos que el fluido es Newtoniano.

El esfuerzo cortante viene dado por

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}\Big|_{r=R}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{d}{dr}\left(u_{max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\right) = u_{max}\frac{d}{dr}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$= u_{max}\left(-\frac{2r}{R^2}\right)$$

$$\tau = -\mu \cdot u_{max}\left(-\frac{2r}{R^2}\right)\Big|_{r=R} = -\mu \cdot u_{max} \cdot \left(-2\frac{R}{R^2}\right)$$

$$= -\mu \cdot u_{max}\left(-\frac{2}{R}\right) = 2\mu \cdot \frac{u_{max}}{R}$$

Fuerza de fricción $F = \tau \cdot A_s$ $A_S = 2\pi R \cdot L$

$$F = 2\mu \cdot \frac{u_{max}}{\cancel{R}} \cdot (2\pi \cancel{R} L)$$

$$F = 4\pi \mu \cdot L \cdot u_{max}$$

b) $R = 0{,}08\,m$ $L = 30\,m$ $u_{max} = 3\,m/s$ $\mu = 0{,}001\,\frac{kg}{m \cdot s}$

$$F = 4\pi \cdot \left(0{,}001\,\frac{kg}{\cancel{m} \cdot s}\right) \cdot 30\,\cancel{m} \cdot 3\,m/s = 1{,}1309\ N$$

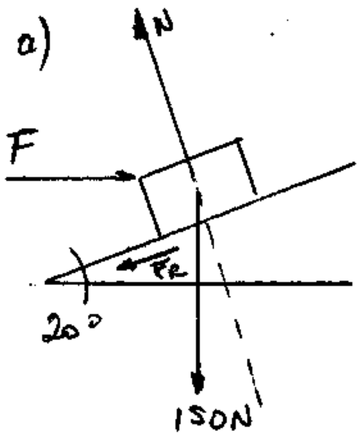
c) En los 30 m se debe vencer la fuerza de rozamiento para mantener el movimiento.

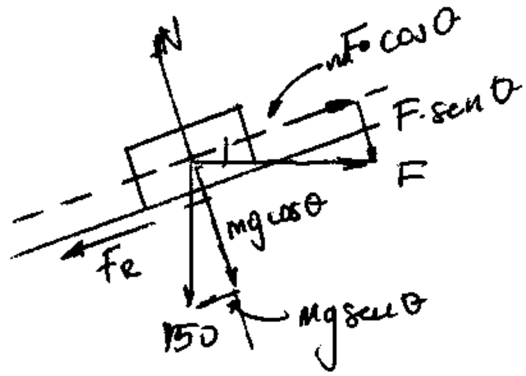
$$F > F_R \qquad P > P_R$$

$P = \frac{F}{A}$ Con $A = \pi R^2$ $P_R = \frac{1{,}1309\ N}{\pi (0{,}08)^2 m^2} = 56{,}24\ Pa$

la diferencia de presiones debe ser superior a 56,24 Pa.

2) a)





$F_R = \mu \cdot N \qquad \mu = 0.27 \qquad \theta = 20°$

$\Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_y = N - F sen\,\theta - mg\cos\theta = 0$

$N = F sen\,\theta + mg\cos\theta$

$F_R = \mu\,(F\cdot sen\,\theta + mg\cos\theta)$

$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_x = F\cdot\cos\theta - mg\,sen\,\theta - F_R = 0$

$= F\cos\theta - mg\,sen\,\theta - \mu(F sen\,\theta + mg\cos\theta) = 0$

$= F\cos\theta - mg\,sen\,\theta - \mu F\,sen\,\theta - \mu mg\cos\theta = 0$

$F\,(\cos\theta - \mu\,sen\,\theta) = \mu mg\cos\theta + mg\,sen\,\theta$

$$F = \frac{\mu mg\cos\theta + mg\,sen\,\theta}{\cos\theta - \mu\,sen\,\theta}$$

$$F = \frac{0.27 \times 150 \times \cos 20° + 150\cdot sen\,20}{\cos 20° - 0{,}27\cdot sen\,20}$$

$F = 105{,}4592\ N$

$F_R = 0.27\,(105{,}4592\cdot sen\,20° + 150\cos 20°)$

$F_R = 47{,}7962\ N$

b) Se coloca una capa de aceite con viscosidad de $0,01 \frac{kg}{m \cdot s}$ de 0,35 mm de espesor.

$$\tau = \mu \cdot \frac{V}{h} = 0,01 \frac{kg}{m \cdot s} \cdot \frac{1,2\ m/s}{0,00035\ m} = 34,28 \frac{N}{m^2}.$$

$F_{ROZ} = \tau \cdot A$ con $A = 0,5 \times 0,25$
$A = 0,125\ m^2$.

$F_{ROZ} = 34,28 \cdot 0,125 = 4,2857\ N$

Para determinar la fuerza horizontal

$$\Sigma F_x = F\cos\theta - F_{ROZ} - mg\,sen\,\theta = 0 \qquad \theta = 20°.$$

$$F\cos\theta - 4,2857 - 150 \cdot sen\,\theta = 0$$

$$F = \frac{4,2857 + 150 \cdot sen\,\theta}{\cos\theta}$$

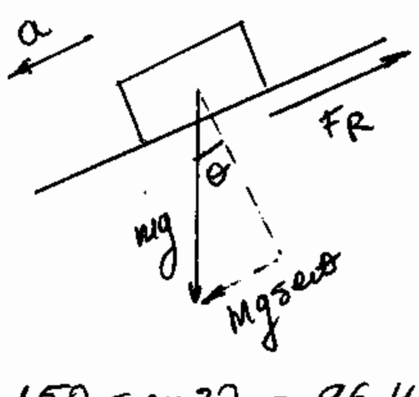
$$F = 59,1562\ N.$$

$$\text{Porcentaje de Reduccion} = \frac{105,4592 - 59,1562}{105,4592} \times 100\%$$

$$= 43,90\%$$

Se reduce en un 43,90%

c) Cuando se deja de aplicar la fuerza horizontal.



$$\Sigma F_x = m.a$$

$$mg\,sen\,\theta - F_R = m.a.$$

$$F_R = \mu \cdot \frac{V}{h} \cdot A = \frac{0,27}{0,00035} \cdot v \times (0,5 \times 0,25)$$

$F_R = 96,42v$ $\quad F_R = 96,42 \cdot v(t)$ en Newton.

$$150 \cdot sen\,20 - 96,4286\ v(t) = m \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

d) $51{,}3030 - 96{,}4286\, v(t) = m \dfrac{dv(t)}{dt}$

$m \cdot g = 150N \quad m = \dfrac{150N}{9{,}8\ m/s^2} \qquad m = 15{,}30\ Kg.$

$51{,}3030 - 96{,}4286\, v = 15{,}3\, v'$

Reescribiendo

$15{,}3\, v' + 96{,}4286\, v = 51{,}3030.$

Es una ecuación diferencial lineal. la dejamos en la forma estándar

$$\frac{dv}{dt} + 6{,}3\, v = 3{,}3518$$

$$P(t) = 6{,}3 \qquad e^{\int P(t)dt} = e^{6{,}3t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{6.3t} \cdot v\right] = 3{,}3518 \cdot e^{6.3t}$$

$$e^{6.3t} \cdot v = \int 3{,}3518\, e^{6.3t}\, dt$$

$$e^{6.3t} \cdot v = 0{,}5320\, e^{6.3t} + c$$

$$v(t) = 0.5320 + c\, e^{-6.3t}$$

Siendo $v(0) = -1.20\ m/s$

$$v(0) = 0{,}5320 + C \cdot e^{0} = -1{,}20$$

$$C = -1{,}20 - 0.5320$$

$$C = -1{,}7320$$

$$v(t) = 0.5320 - 1{,}7320 \cdot e^{-6.3t}$$

e) $t = 0.15 \qquad v(0{,}15) = 0.5320 - 1{,}7320 \cdot e^{-6.3 \cdot 0.15}$

$$v(0.15) = -0{,}1411\ m/s.$$

A los 0,15 seg el objeto continua subiendo pero con una velocidad de 0,1411 m/s

f) llegará a cero, cuando deje de subir y comience a bajar.

$$v(t) = 0.5320 - 1{,}7320\,e^{-6.3t} = 0.$$

$$e^{-6.3t} = \frac{-0.5320}{-1{,}7320}$$

$$e^{-6.3t} = 0{,}3071 \qquad \ln e^{-6.3t} = \ln 0.3071$$

$$-6.3t = -1{,}18038$$

$$t = 0{,}1873 \text{ seg.}$$

En $t = 0{,}1873$ s el cuerpo se detiene.

g) $v(t) = 0.5320 - 1{,}7320\,e^{-6.3t}$.

$$\frac{dx}{dt} = 0.5320 - 1{,}7320\,e^{-6.3t}$$

$$x = \int \left(0.5320 - 1{,}7320\,e^{-6.3t}\right)dt.$$

$$x = 0.5320t + 0{,}2749\,e^{-6.3t} + C$$

Suponemos $x(0) = 0$.

$$0.2749 + C = 0 \qquad C = -0{,}2749.$$

$$x(t) = 0.5320t + 0{,}2749\,e^{-6.3t} - 0{,}2749 \text{ m}$$

h) El desplazamiento máximo se da cuando $v(t) = 0$ se cumple en $t = 0{,}1873$ seg.

$$x(0{,}1873) = 0.5320(0{,}1873) + 0{,}2749\,e^{-6.3(0{,}1873)} - 0{,}2749$$

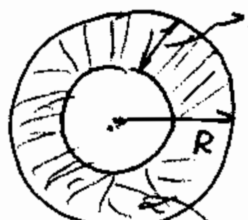
$$= -0{,}0907$$

Se desplaza hacia arriba (Derecha) 9,07 cm.

i) Velocidad terminal $v_T = \lim_{t\to\infty} v(t)$

$$v_T = \lim_{t\to\infty}\left(0{,}5320 - 1{,}7320\,e^{-6.3t}\right) = 0{,}5320 \text{ m/s.}$$

3) a) Torque $T = F \cdot d$ con $d = R$.



Fuerza de Rozamiento.

$F_R = \tau \cdot A$

$$\tau = \mu \cdot \frac{du_\theta}{dr} = \mu \cdot \frac{\Delta u_\theta}{\Delta r}$$

$\Delta r = l$

$$\tau = \mu \cdot \frac{V}{l}.$$

$$V = \omega \cdot R \qquad \omega = 200 \frac{rev}{min} * \frac{2\pi\ rad}{1\ rev} * \frac{1\ min}{60\ s} = \frac{200 \cdot 2\pi}{60} \frac{rad}{s.}$$

$$V = \frac{20}{3}\pi \frac{rad}{s.} * R$$

Se expresa de forma general para cualquier ω.

$$\omega = \dot{n} \cdot \frac{2\pi}{60} \qquad V = \frac{2\pi}{60} \cdot \dot{n} \cdot R \qquad \dot{n} \text{ en rev por minuto.}$$

$$\tau = \mu \cdot \frac{2\pi \cdot \dot{n} \cdot R}{60} \cdot \frac{1}{l} = \frac{\mu \cdot \pi \cdot \dot{n} \cdot R}{30 l.}$$

$A = 2\pi R \cdot L$

$$F_R = \frac{\mu \cdot \pi \cdot \dot{n} \cdot R}{30 l} \cdot 2\pi R \cdot L.$$

$$F_R = \frac{\mu \cdot \pi^2 \cdot \dot{n} R^2 \cdot L}{15 l.}$$

Torque $T = F_R \cdot R = \dfrac{\mu \cdot \pi^2 \cdot \dot{n} R^3 L}{15 l.}$

b) $T = I \cdot \alpha$ $\quad I$ = Inercia

α = Aceleración angular.

Para un cilindro $I = \frac{1}{2} m R^2$.

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{\mu \pi^2 \cdot \dot{n} R^{\cancel{3}} \cdot L}{15 l} = \frac{1}{2} m \cancel{R^2} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2\mu\,\pi^2 \cdot \dot{n} R \cdot L}{15\,l \cdot m}$$

Como $D.R = 7.6$ (Acero)

$$\rho = 7600\ \frac{kg}{m^3}$$

$$m = \rho \cdot V = 7600\ \frac{kg}{m^3} \times \pi R^2 \cdot L$$

$$m = 7600\ \frac{kg}{m^3} \cdot \pi (0.15)^2 * 0.75$$

$$m = 402{,}9092\ kg$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{2\mu \cdot \pi^2 \cdot \dot{n} R \cdot L}{15 \cdot l \cdot (402{,}9092\,kg)}$$

$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$ $\quad \omega = \displaystyle\int \frac{2\mu\pi^2 \cdot \dot{n} R \cdot L}{15\,l \cdot m}\, dt$

$$\omega = \frac{2\mu\pi^2 \cdot \dot{n} R \cdot L}{15 \cdot l \cdot m}\, t + C$$

$\omega(0) = \omega_0$ $\quad \omega = \dfrac{2\mu\pi^2 \cdot \dot{n} \cdot R \cdot L}{15 \cdot l \cdot m}\, t + \omega_0$

$\theta = \dfrac{d\omega}{dt}$ $\quad \theta = \displaystyle\int \left(\left(\frac{2\mu\pi^2 \cdot \dot{n} \cdot R \cdot L}{15 \cdot l \cdot m} \right) t + \omega_0 \right) dt$

$$\theta = \frac{\mu\pi^2 \cdot \dot{n} R L}{15\,l\,m}\, t^2 + \omega_0 t + C$$

Suponemos $\theta(0) = 0$ $\quad C \to 0$

$$\theta(t) = \frac{\mu\pi^2 \cdot \dot{n} R L}{15\,l\,m}\, t^2 + \omega_0 t$$

c) $T = 0.8\ N \cdot m$. $\dot{n} = 200\ rpm$ $L = 0{,}75\ m$ $\ell = 0.0012\ m$.
$R = 0{,}15\ m$.

$\mu = ?$

$$T = \frac{\mu \cdot \pi^2 \cdot \dot{n} R^3 L}{15 \cdot \ell}$$

$$0.8 = \frac{\mu \cdot \pi^2 \cdot 200 \cdot (0{,}15)^3 \cdot (0{,}75)}{15 \cdot (0.0012)}$$

$$0.8 = \mu \cdot 277{,}5826$$

$$\mu = \frac{0.8}{277{,}5826} \qquad \mu = 2{,}8820 \times 10^{-3}\ \frac{Kg}{m \cdot s}.$$

d) $$\omega_0 = \dot{n} \cdot \frac{2\pi}{60} = \frac{20}{3}\pi \cdot \frac{Rad}{s}.$$

$$\omega_f = 0{,}1\left(\frac{20}{3}\pi\ \frac{rad}{s}\right) = \frac{2}{3}\pi\ \frac{rad}{s}.$$

$$\omega(t) = -\frac{2\mu\ \pi^2 \cdot \dot{n} \cdot R \cdot L}{15 \cdot \ell \cdot m}\ t + \frac{20}{3}\pi$$

$$\omega(t) = -\frac{2\,(2{,}8820 \times 10^{-3})\,\pi^2 \cdot 200 \cdot 0{,}15 \times 0{,}75}{15 \times 0{,}0012 \times 402{,}90}\ t + \frac{20}{3}\pi.$$

$$\frac{2}{3}\pi = -0{,}176498\,t + \frac{20}{3}\pi$$

$$t = \frac{-6\pi}{-0{,}176498} \qquad t = 106{,}79\ s.$$

e) Torque de fricción del Fondo.

$$A = \pi \cdot R^2$$

$$\tau = \mu \cdot \frac{V}{\ell} = \mu \cdot \frac{\pi \cdot \dot{n} \cdot R}{30\ell}.$$

$$F_R = \tau \cdot A = \mu \cdot \frac{\pi \cdot \dot{n} \cdot R}{30\ell} \cdot \pi R^2 = \mu \frac{\pi^2 \cdot \dot{n} R^3}{30 \cdot \ell}.$$

$$T = F_R \cdot R = \mu \frac{\pi^2 \cdot \dot{n} R^3}{30 l} \cdot R$$

$$= \mu \frac{\pi^2 \cdot \dot{n} R^4}{30 l}.$$

f) Torque total $= T_1 + T_2$

$$-T = I \cdot \alpha$$

$$-(T_1 + T_2) = I \cdot \alpha$$

$$-\left(\mu \cdot \frac{\pi^2 \cdot \dot{n} R^3 L}{15 l} + \frac{\mu \pi^2 \cdot \dot{n} R^4}{30 l} \right) = \frac{1}{2} m R^2 \alpha.$$

$$-\left(\frac{2 \mu \pi^2 \cdot \dot{n} R^3 L + \mu \pi^2 \cdot \dot{n} R^4}{30 l} \right) \cdot \frac{2}{m R^2} = \alpha.$$

$$\alpha = - \frac{\mu \pi^2 \dot{n} R^{\cancel{3}}}{30 l} (2L + R) \cdot \frac{2}{m \cdot \cancel{R^2}}$$

$$\alpha = - \frac{\mu \pi^2 \cdot \dot{n} R}{15 l m} (2L + R)$$

$$\omega = \int \alpha(t) dt \qquad \omega(t) = - \mu \frac{\pi^2 \cdot \dot{n} R}{15 l m} (2L + R) t + \omega_0$$

$$\omega_0 = \dot{n} \cdot \frac{2\pi}{60} = \frac{20}{3} \pi \ \frac{rad}{s}.$$ Ya que $\omega(0) = 200 \frac{rev}{min}$.

$$\theta = \int \omega(t) dt \qquad \theta(0) = 0.$$

$$\theta = -\frac{1}{2} \mu \frac{\pi^2 \cdot \dot{n} R}{15 \cdot l m} (2L + R) t^2 + \frac{20}{3} \pi t$$

g) $T = T_1 + T_2 = \mu \frac{\pi^2 n R^3}{30 l} (2L + R)$

Si $T = 0.8$ $\qquad 0.8 = \mu \cdot \frac{\pi^2 \cdot 200 \cdot 0{,}15^3}{30 \times (0{,}0012)} (2 \times 0{,}75 + 0{,}15)$

$0.8 = 305{,}34 \mu \qquad \mu = 2{,}62 \times 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s}.$

4) $R = 0{,}004\ mm = 4 \times 10^{-6}\ m.$

$\sigma = 0{,}073\ N/m \quad \phi = 15^{\circ}.$

$$h = \frac{2\sigma \cdot \cos\phi}{\rho g R}$$ (según diapositiva 24 Propiedades de Fluidos 2015.pdf)

$$h = \frac{2 \times 0{,}073\ N/m \times \cos 15^{\circ}}{1000\ \frac{kg}{m^3} \times 9.8\ \frac{m}{s} \times 4 \times 10^{-6}\ m}$$

$h = 3{,}5975\ m.$

$\rho = 1000\ \frac{kg}{m^3}$ para el agua.