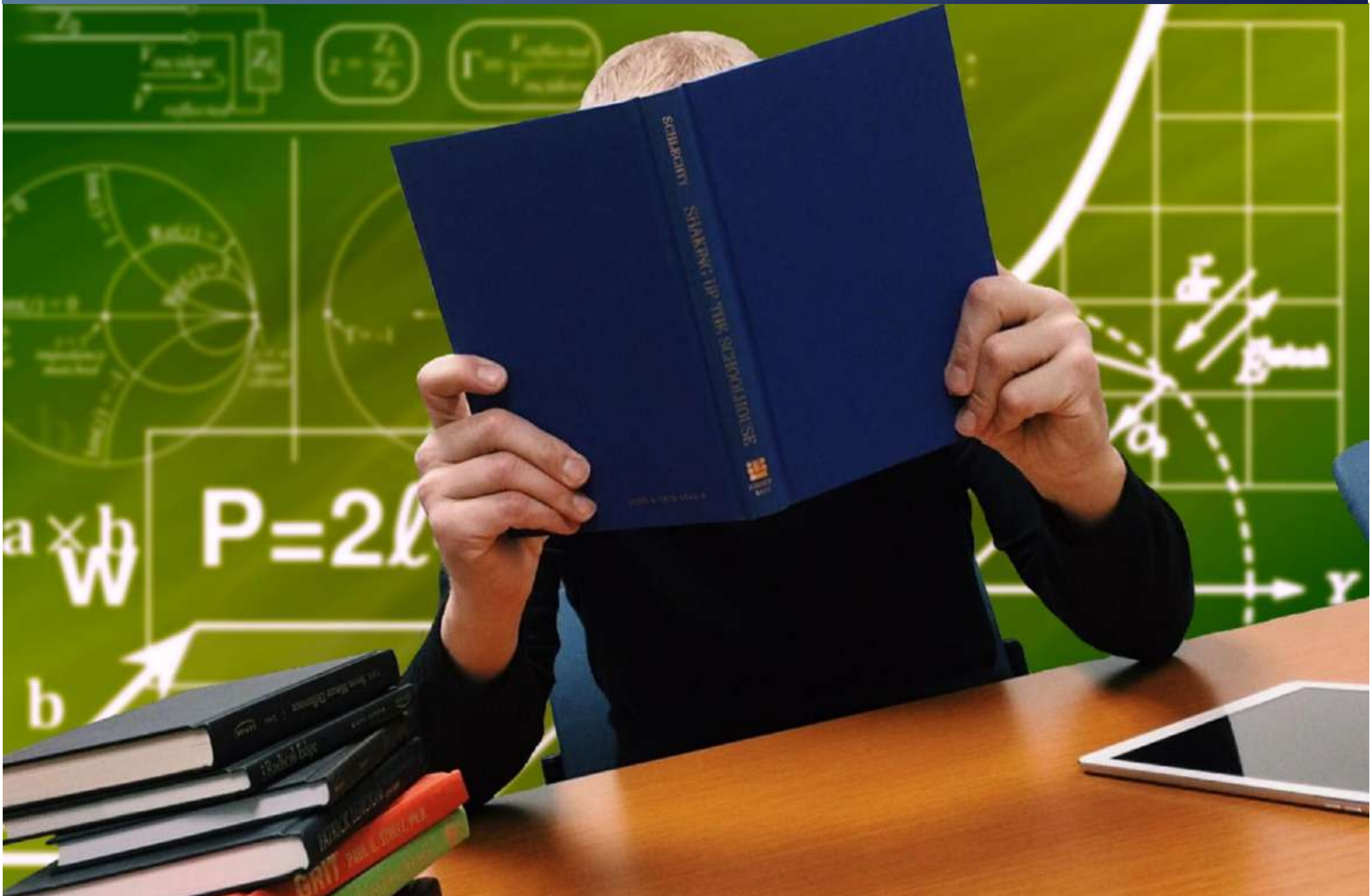
Ejercicios y Talleres



puedes enviarlos a
klasesdematematicasymas@gmail.com

SISTEMAS DE UNIDADES Y ESTIMACIONES DE ÓRDENES DE MAGNITUD

1. Defina Sistema Internacional de Unidades. Describa brevemente otros sistemas de unidades.
2. ¿Cuáles son las unidades fundamentales del SI y como se definen? ¿Cuáles son unidades derivadas?
3. El diámetro exterior de un tornillo es de 0.75 pulgadas. Exprese este diámetro en *mm*.
4. La densidad del agua es de $1gr / cm^3$. Exprese este valor en $1Kg / m^3$.
5. Según la etiqueta de un recipiente para salsa de tomate, el volumen contenido es de *0.482 lt.* Exprese este volumen en litros y en pulgadas cúbicas.
6. ¿Qué volumen total de aire respira una persona durante toda su vida? Estime que una persona respira unos $500cm^3$ de aire en cada aliento.
7. ¿Cuántas veces late el corazón de una persona en su vida?¿Cuántos galones de sangre bombea? Estime que el corazón bombea $50cm^3$ de sangre en cada latido.

ANÁLISIS VECTORIAL.

1. Dados los vectores **A**=3**i**-4**j**+10**k** y **B**=-6**i**+7**j**+3**k**. Halle
   a. **A** x **B**
   b. **B** x **A**
   c. Halle el vector **C**=-3**i**+4**j**+c**k** tal que (**A** x **B**).**C** =0

2. En el problema anterior determine el vector unitario en dirección de **T**.

3. Considere los dos vectores **A**=(cosα)**i**+(senα)**j**
   B=(cosβ)**i**+(senβ)**j**

   donde α y β son los ángulos respectivos que cada vector forma con el eje x.

   a. Muestre que **A** y **B** son vectores unitarios.
   b. Trace un dibujo de estos vectores. Haga uso de estos vectores y del producto escalar para demostrar que:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

4. Determine usando técnicas vectoriales el ángulo entre la diagonal de un cubo y la diagonal de una de sus caras. (Tome diagonales que coincidan en uno de sus extremos).

5. Si el vector $\vec{r}(t) = 3t^2\,\hat{i} + e^{4t}\,\hat{j} + t\,\hat{k}$, representa el vector de posición de una partícula en función del tiempo, determine la distancia de la partícula al origen cuando t = 10s. Considere que t está en segundos y que r está en metros.

10. Encuentre un vector perpendicular a los vectores $\vec{M} = 2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 6\,\hat{k}$ y $\vec{N} = -\,\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$
    Es única la solución? Explique.

1. Sistema Internacional de Unidades.

Es un sistema que unifica las unidades físicas básicas, a partir de las cuales se definen las otras magnitudes físicas.

Magnitud Física	Símbolo	Unidad básica	Símbolo de la Unidad
Longitud	L	metro	m
Tiempo	T	segundo	s
Masa	M	Kilogramo	Kg
Intensidad de Corriente	I	Amperio	A
Temperatura	Θ	Kelvin	k
Cantidad de Sustancia	N	mol	mol
Intensidad luminosa	J	Candela	cd

Otros sistemas de unidades cambian sus patrones, por ejemplo el sistema inglés que usa el pie como unidad de longitud

2. En unidades derivadas se tiene para el S.I.
Por ejemplo

Newton — Unidad de fuerza $N = \frac{m \cdot kg}{s^2}$

Pascal — Unidad de Presión $Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{Kg}{s^2 \cdot m}$

Joule — Unidad de energía $J = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$

3. $0{,}75\,\cancel{mm} * \frac{1\,plg}{25{,}4\,\cancel{mm}} = 0{,}02952\ plg$

4. $1\,\frac{gr}{cm^3} * \frac{(100\,cm)^3}{(1\,m)^3} * \frac{1\,Kg}{1000\,gr} = 1000\ Kg/m^3$

En estos ejercicios se busca multiplicar y dividir por lo mismo, ~~kg~~ $1\,plg = 25{,}4\,mm$ o $1m = 100\,cm$
El orden debe ser tal que se puedan anular las unidades.

(5). Vol = 0.482 Lt

$1\ Lt = 1000\ cm^3$ $\quad 1\ plg = 2{,}54 cm$

Por tanto

$$0.482\ Lt * \frac{1000\ cm^3}{1\ Lt} * \frac{(1\ plg)^3}{(2{,}54\ cm)^3} = 29{,}4134\ plg^3$$

(6) $V = 500\ cm^3$ en cada aliento

$$500\ cm^3 * \frac{(1\ m)^3}{(100\ cm)^3} = 0{,}0005\ m^3$$

Suponiendo un aliento por cada segundo se tiene

$$365\ \frac{dias}{año} * 24\ \frac{horas}{dia} * \frac{60\ min}{hora} * \frac{60\ seg}{min} = 31536000\ seg$$

Si la persona vive 70 años se tiene

$70 * 31536000 = 2'207.520.000$ de segundos

$2'207520000 * 0.0005\ m^3 = 1'103.760\ m^3$ en una vida de 70 años

(7) Suponiendo 60 latidos por minuto → 1 por segundo

Si la persona de 70 años vive 2'207520000 segundos entonces tendra 2'207520000 latidos

---

Análisis vectorial

1. $A = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 10\hat{k}$ $\quad B = -6\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}$

a) $$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -4 & 10 \\ -6 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -4 & 10 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-12-70) - \hat{j}(9+60) + \hat{k}(21-24)$$
$$= -82\hat{i} - 69\hat{j} - 3\hat{k}$$

b) $$B \times A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & 7 & 3 \\ 3 & -4 & 10 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(70+12) - \hat{j}(-60-9) + \hat{k}(24-2$$

$B \times A = 82\hat{i} + 69\hat{j} + 3\hat{k}$

c. $C = -3\hat{i} + 4\hat{j} + c\hat{k}$ $\quad (A \times B) \cdot C = 0$

$$A \times B = -82\hat{i} - 69\hat{j} - 3\hat{k}$$
$$(-82\hat{i} - 69\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (-3\hat{i} + 4\hat{j} + c\hat{k})$$
$$= (-82)(-3) + (-69)(4) + (-3) \cdot c = 0$$
$$246 - 276 - 3c = 0$$
$$-30 - 3c = 0$$
$$-3c = 30$$
$$c = -10$$

2. No se tiene información de a qué vector se le halla el vector unitario y cual es el vector T.

3. $\vec{A} = \cos\alpha\,\hat{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{j}$ $\qquad \vec{B} = \cos\beta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\beta\,\hat{j}$

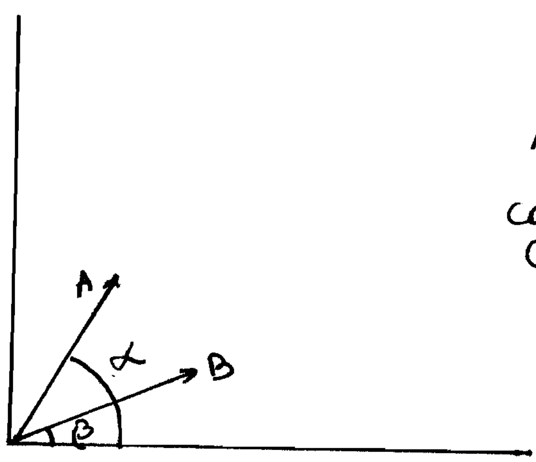
a) Si son vectores unitarios su magnitud o norma es 1.

$$|\vec{A}| = \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1} = 1$$

Identidad trigonométrica básica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

$$|\vec{B}| = \sqrt{(\cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\beta)^2} = \sqrt{\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta} = \sqrt{1} = 1.$$

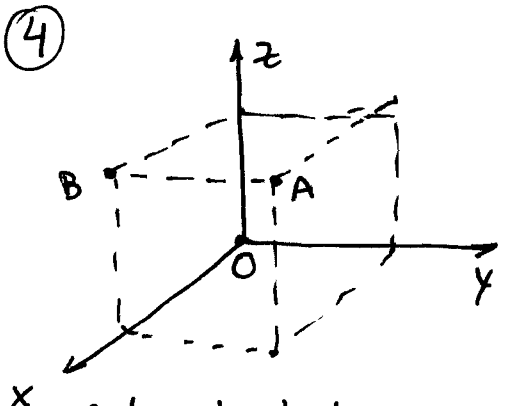
b)



$$A \cdot B = (\cos\alpha\,\hat{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\hat{j}) + (\cos\beta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\beta\,\hat{j})$$
$$A \cdot B = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

como
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
entonces
$$\cos(\alpha - \beta) = A \cdot B$$

(4)



cubo de lado = a

coordenadas de los puntos

$A(a, a, a) \qquad B(a, 0, a) \qquad O(0, 0, 0)$

$$\vec{OA} = A - O = (a, a, a) - (0, 0, 0) = (a, a, a)$$
$$\vec{OB} = B - O = (a, 0, a) - (0, 0, 0) = (a, 0, a)$$

$$\cos\alpha = \frac{A \cdot B}{|A| \cdot |B|}$$

Para nuestro caso $\alpha =$ ángulo pedido

$$\cos\alpha = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|} = \frac{(a,a,a)\cdot(a,0,a)}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2+0^2+a^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2+0+a^2}{\sqrt{3a^2}\sqrt{2a^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{6a^4}} = \frac{2a^2}{a^2\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}} \qquad \alpha = \cos^{-1}(2/\sqrt{6}) = 35{,}26^\circ$$

(5) $r(t) = 3t^2\hat{i} + e^{4t}\hat{j} + t\hat{k}$

Si $t = 10s$ → reemplazamos

$$r(t) = 3\cdot 10^2\hat{i} + e^{4\cdot 10}\hat{j} + 10\hat{k}$$

$$r(10) = 300\hat{i} + e^{40}\hat{j} + 10\hat{k}$$

la distancia al origen es la norma del vector

$$|r(t)| = \sqrt{300^2 + (e^{40})^2 + 10^2} = \sqrt{90000 + e^{80} + 100}$$

$$\cong 2{,}35 \times 10^{17} \text{ metros.}$$

(10) $M = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$N = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$M \times N =$ Es un vector perpendicular a M y N simultáneamente

$$M\times N = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(3-6) - \hat{j}(-2+6) + \hat{k}(2-3)$$

$$= -3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$$

No es la única solución, tambien se puede encontrar

$N \times M = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$

O cualquier vector multiplo de estos dos vectores.