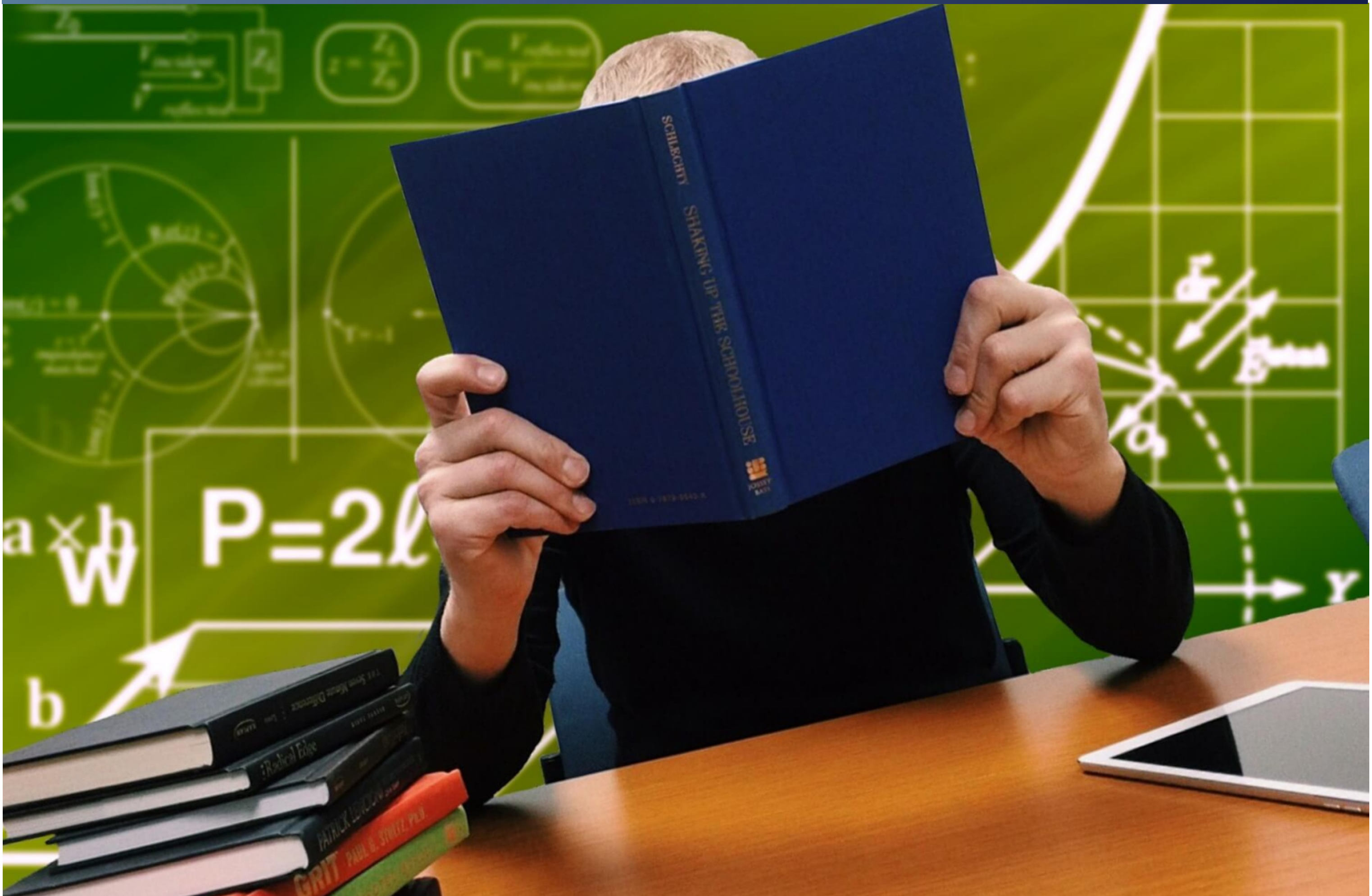
Ejercicios y Talleres



puedes enviarlos a
klasesdematematicasymas@gmail.com

EJERCICIOS UNIDADES 1, 2 Y 3

Nota: En adelante utilizaremos la abreviación ED para ecuación diferencial.

TEMAS A EVALUAR

- Unidad 1
  - Clasificación de las ecuaciones diferenciales
  - Problemas de valor inicial

- Unidad 2
  - ED de primer orden de variables separables
  - ED lineales
  - ED exactas
  - ED Homogénea
  - ED de Bernoulli.

- Unidad 3:
  - Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

EJERCICOS PROPUESTOS

1. En los siguientes problemas establezca si la ED es lineal o no lineal, indique el orden de cada ecuación y decida si la ecuación es ordinaria o parcial:

a. $(1-x)y''-4xy'+5y=\cos x$

b. $x\dfrac{d^3y}{dx^3}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4+y=0$

c. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial t}$

d. $(y^2-1)dx+xdy=0$

e. $\dfrac{d^2u}{dr^2}+\dfrac{du}{dr}+u=\cos(r+u)$

2. En los problemas siguientes verifique que la función indicada sea una solución explicita de la ED dada.

   a. $2y' + y = 0$; $\qquad y = e^{\frac{-x}{2}}$

   b. $y'' + y = \tan x$; $\qquad y = -(\cos x)Ln(\sec x + \tan x)$

   c. $P' = P(1-P)$; $\qquad P = \dfrac{c_1 e^t}{1 + c_1 e^t}$

   d. $x^3 \dfrac{d^3 y}{dx^3} + 2x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 12x^2$; $\qquad y = c_1 x^{-1} + c_2 x + c_3 x \ln x + 4x^2$

3. Resuelva para *m.*

   a. Determine valores m tales que la función: $y = e^{mx}$ sea una solución de la ED $y' + 2y = 0$. Explique su razonamiento.

   b. Determine valores m tales que la función $y = x^m$ sea una solución de la ED $xy'' + 2y' = 0$. Explique su razonamiento.

4. Resolver las siguientes ED:

   a. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

   b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

   c. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 senx$

   d. $x^2 y' + x(x+2)y = e^x$

   e. $(x - y^3 + y^2 senx)dx = (3xy^2 + 2y\cos x)dy$

   f. $x\dfrac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

   g. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$

   h. $xy^2 \dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3, \quad con \;\; y(1) = 2$

   i. $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{2}{y^2}$

   j. $t^2 \dfrac{dy}{dt} + y^2 = ty$

5. Resolver las siguientes ED de Bernoulli.

   a. $(y - 4x - 1)^2 dx - dy = 0$

   b. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3 y^2$

   c. $\cos(x + y)\, dy = sen(x + y)dx$

   d. $xdy - ydx = \sqrt{xy}dx$

PROBLEMAS

Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales

6. La tasa de disminución del elemento Radio es proporcional a la cantidad que queda de él. Pruebe que la cantidad C de radio presente en el momento t está dada por $C = C_0 e^{-kt}$.

7. Según la ley de enfriamiento de Newton, la velocidad a que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire. Si, cuando la temperatura del aire es de 20 ^{0}C, se enfría una sustancia desde 100 ^{0}C hasta 60 ^{0}C en 15 minutos, hallar la temperatura después de 30 minutos.

8. El número de bacterias en un cultivo aumenta de 800 a 1800 en dos horas. Encontrar una fórmula para el número de bacterias en el tiempo t, suponiendo que en cada momento la tasa de crecimiento es directamente proporcional al número de bacterias. ¿Cuál será el número de bacterias al cabo de 5 horas?

9. La ley de Newton del enfriamiento afirma que la rapidez con que un objeto se enfría es directamente proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y el medio que los rodea. la temperatura de un objeto baja de 130º F. a 100º F. en 1/2 hora, Estando rodeado por aire a una temperatura de 75º F. Calcular su temperatura al cabo de otra media hora.

10. Se calcula que la población del mundo en 1900 era de 1600 millones de personas y que para 1950 había aumentado a 2510 millones. ¿Cuál será la población del mundo en el año 2010, suponiendo que hay alimento y espacio vital ilimitados?

11. Un termómetro se lleva al exterior donde la temperatura ambiental es de 70 grados Fahrenheit. Al cabo de 5 minutos, el termómetro registra 60 grados Fahrenheit, 5 minutos después registra 54 grados Fahrenheit. ¿Cuál era la temperatura del interior?

12. El crecimiento de una ciudad, es proporcional al número de habitantes que hay en un instante cualquiera. Si la población inicial es de 400.000; y al cabo de 3 años es de 450.000. ¿Qué población habrá en 10 años?

13. La cantidad de bacterias de un cultivo crece proporcionalmente al número de bacterias que haya en un instante dado. Se observa que al cabo de 2 horas el número de bacterias es de 150 y al cabo de 5 horas es de 400. ¿Cuántas bacterias había inicialmente?

14. Un gran tanque con 1500 litros de agua pura se comienza a verter una solución salina a razón constante de 5 litros/minuto. La solución dentro del tanque se mantiene revuelta y sale del tanque a razón de 5 litros/minuto. Si la concentración de sal en la solución que entra al tanque es de 0.1 Kg/litro, encuentre el momento en que la concentración de sal en el tanque llega a 0,08 Kg/litro.

15. En el problema 14 suponga que la solución salina sale del tanque a razón de 4 litro/minuto en vez de 5 litros/minuto, manteniéndose el resto igual. Determine la concentración de sal en el tanque como una función del tiempo.

Ecuaciones Diferenciales

1 a. $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

Lineal, Segundo orden, ordinario.

b. $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

No lineal, Tercer orden, ordinario.

c. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t}$

No lineal, Segundo orden, parcial.

d. $(y^2-1)dx + x\,dy = 0$

No lineal, Primer orden, ordinaria.

e. $\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} + u = \cos(r+u)$

No lineal, segundo orden, ordinaria

2. a) $2y' + y = 0 \qquad y = e^{-x/2}$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}e^{-x/2} \qquad 2\left(-\dfrac{1}{2}e^{-x/2}\right) + e^{-x/2} = 0$

$-e^{-x/2} + e^{-x/2} = 0$

Es solución $\qquad 0 = 0$

b) $y'' + y = \tan x \qquad y = -\cos x \ln(\sec x + \tan x)$

$y' = \sin x \ln(\sec x + \tan x) - \cos x \cdot \dfrac{1}{\sec x + \tan x}(\sec x \tan x + \sec^2 x)$

$y' = \sin x \ln(\sec x + \tan x) - \dfrac{\cos x \sec x \tan x + \cos x \sec^2 x}{\sec x + \tan x}$

$y'' = -\cos x \ln(\sec x + \tan x) + \sin x \cdot \dfrac{1}{\sec x + \tan x} \cdot (\sec x \tan x + \sec^2 x)$

$-\left(\dfrac{\cos x \sec x \cancel{(\tan x + \sec x)}}{\cancel{\sec x + \tan x}}\right)'$

$y'' = -\cos x \ln(\sec x + \tan x) + \dfrac{\sin x \sec x \cancel{(\tan x + \sec x)}}{\cancel{\sec x + \tan x}}$

$-(\cos x \sec x)'$

$$y'' = -\cos x \ln(\sec x + \tan x) + \operatorname{sen} x \sec x + \operatorname{sen} x \sec x - \cos x \sec x \tan x$$

Reemplazando

$$-\cos x \ln(\sec x + \tan x) + 2 \operatorname{sen} x \sec x - \cos x \sec x \tan x + - \cos x \ln(\sec x + \tan x) = \tan x$$

$$-2\cos x \ln(\sec x + \tan x) + 2 \operatorname{sen} x \sec x - \tan x - \cos x \ln(\sec x + \tan x) = \tan x \qquad \text{(No se cumple)}$$

<u>No es solución</u>

c) $P' = P(1-P) \qquad P = \dfrac{C_1 e^t}{1 + C_1 e^t}$

$$P' = \frac{(C_1 e^t)(1 + C_1 e^t) - (C_1 e^t)(C_1 e^t)}{(1 + C_1 e^t)^2}$$

$$P' = \frac{C_1 e^t \cdot (1 + C_1 e^t) - (C_1 e^t)^2}{(1 + C_1 e^t)^2}$$

Reemplazando

$$\frac{C_1 e^t \cdot (1 + C_1 e^t) - (C_1 e^t)^2}{(1 + C_1 e^t)^2} = \frac{C_1 e^t}{1 + C_1 e^t}\left(1 - \frac{C_1 e^t}{1 + C_1 e^t}\right)$$

$$= \frac{C_1 e^t}{1 + C_1 e^t}\left(\frac{1 + C_1 e^t - C_1 e^t}{1 + C_1 e^t}\right)$$

$$\frac{C_1 e^t + (C_1 e^t)^2 - (C_1 e^t)^2}{(1 + C_1 e^t)^2} = \frac{C_1 e^t \cdot 1}{(1 + C_1 e^t)^2}$$

$$\frac{C_1 e^t}{(1 + C_1 e^t)^2} = \frac{C_1 e^t}{(1 + C_1 e^t)^2}$$

<u>Es solución</u>

d) $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} + 2x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - x \dfrac{dy}{dx} + y = 12x^2$

$$y = C_1 x^{-1} + C_2 x + C_3 x \ln x + 4x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{C_1}{x^2} + C_2 + C_3 \ln x + C_3 \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + 8x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{2C_1}{x^3} + \frac{C_3}{x} + 8 \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{6C_1}{x^4} - \frac{C_3}{x^2}$$

Reemplazando

$$x^3\left(-\frac{6C_1}{x^4}-\frac{C_3}{x^2}\right)+2x^2\left(\frac{2C_1}{x^3}+\frac{C_3}{x}+8\right)-x\left(-\frac{C_1}{x^2}+C_2+C_3\ln x+C_3\right.$$

$$\left.+8x\right)+C_1x^{-1}+C_2x+C_3x\ln x+4x^2=12x^2$$

$$\cancel{-\frac{6C_1}{x}}\cancel{-C_3x}+\cancel{\frac{4C_1}{x}}+\cancel{2C_3x}+16x^2+\cancel{\frac{C_1}{x}}\cancel{-C_2x}\cancel{-xC_3\ln x}\cancel{-C_3x}$$

$$-8x^2+\cancel{C_1x^{-1}}+\cancel{C_2x}+\cancel{C_3x\ln x}+4x^2=12x^2$$

$$12x^2=12x^2$$

Por tanto, si es solución.

3. a) $y'+2y=0$ $\qquad y=e^{mx}$

$$y'=me^{mx}$$

$$me^{mx}+2e^{mx}=0$$

$$e^{mx}(m+2)=0 \qquad m+2=0 \qquad m=-2$$

Si $m=-2$ se cumple

b) $y=x^m$ $\qquad xy''+2y'=0$

$$y'=mx^{m-1}$$

$$y''=m(m-1)x^{m-2}$$

$$x\left(m(m-1)x^{m-2}\right)+2mx^{m-1}=0$$

$$m(m-1)x^{m-1}+2mx^{m-1}=0$$

$$x^{m-1}\cdot\left(m(m-1)+2m\right)=0$$

$$m^2-m+2m=0$$

$$m^2+m=0 \qquad m(m+1)=0$$

$$m=0 \qquad m+1=0$$

$$m=-1$$

los valores de m son $m=0$ $m=-1$

4. a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot e^{2y}$

$\dfrac{dy}{e^{2y}} = dx\, e^{3x}$ $\qquad \int e^{-2y}\, dy = \int e^{3x}\, dx$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} e^{-2y} = \frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$e^{-2y} = -\frac{2}{3} e^{3x} + C$$

$$\ln\left(e^{-2y}\right) = \ln\left(-\frac{2}{3} e^{3x} + C\right)$$

$$-2y = \ln\left(-\frac{2}{3} e^{3x} + C\right)$$

$$y = -\frac{1}{2} \ln\left(-\frac{2}{3} e^{3x} + C\right)$$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(y+3) - (y+3)}{x(y-2) + 4(y-2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(y+3)}{(x+4)(y-2)}$$

$$\frac{(y-2)}{(y+3)}\, dy = \frac{(x-1)}{(x+4)}\, dx$$

Realizamos las divisiones

$$\begin{array}{r|l} y-2 & y+3 \\ \cline{2-2} \underline{-y-3} & 1 \\ -5 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} x-1 & x+4 \\ \cline{2-2} \underline{-x-4} & 1 \\ -5 & \end{array}$$

$$\frac{y-2}{y+3} = 1 - \frac{5}{y+3} \qquad\qquad \frac{x-1}{x+4} = 1 - \frac{5}{x+4}$$

Retomando

$$\int \left(1 - \frac{5}{y+3}\right) dy = \int \left(1 - \frac{5}{x+4}\right) dx$$

$$y - 5 \ln|y+3| = x - 5 \ln|x+4| + C$$

c. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 \operatorname{sen} x$

$$\frac{1}{x}\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = \frac{1}{x}\left(x^2 \operatorname{sen} x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x \operatorname{sen} x$$ Es una ecuacion lineal.

$P(x) = -\dfrac{1}{x}$ $\quad \displaystyle\int P(x)\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx = -\ln x$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-\ln x} = x^{-1}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-1}y\right] = x^{-1}\cdot x \operatorname{sen} x$$

$$x^{-1}y = \int \operatorname{sen} x\,dx \qquad x^{-1}y = -\cos x + c$$

$$y = -\frac{\cos x}{x^{-1}} + \frac{c}{x^{-1}} \qquad y = -x\cos x + x\cdot c$$

d) $x^2y' + x(x+2)y = e^x$

$$y' + \frac{x(x+2)}{x^2}y = \frac{e^x}{x^2}$$

$$y' + \left(\frac{x+2}{x}\right)y = \frac{e^x}{x^2}$$ Ecuación diferencial lineal.

$P(x) = \dfrac{x+2}{x} = 1 + \dfrac{2}{x}$ $\quad \displaystyle\int P(x)\,dx = \int\left(1+\frac{2}{x}\right)dx$

$$\int P(x)\,dx = x + 2\ln x \qquad e^{\int P(x)dx} = e^{x+2\ln x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{x+2\ln x}\cdot y\right] = e^{x+2\ln x}\cdot\frac{e^x}{x^2}$$

$$e^{x+2\ln x}\cdot y = \int e^x\cdot e^{\ln x^2}\cdot\frac{e^x}{x^2}\,dx$$

$$e^{x+2\ln x}\cdot y = \int \frac{e^{2x}\cdot x^2}{x^2}\,dx$$

$$e^x\cdot e^{\ln x^2}y = \int e^{2x}dx \qquad e^x x^2 y = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}e^{2x}}{e^x x^2} + \frac{c}{x^2e^x} \qquad y = \frac{1}{2}x^{-2}e^x + x^{-2}e^{-x}\cdot c$$

e. $(x-y^3+y^2\operatorname{sen}x)dx = (3xy^2+2y\cos x)dy$

$$(x-y^3+y^2\operatorname{sen}x)dx + (-3xy^2-2y\cos x)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -3y^2+2y\operatorname{sen}x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -3y^2+2y\operatorname{sen}x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ Es una ecuación exacta.

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$$

$$= \int (x-y^3+y^2\operatorname{sen}x)\,dx + g(y)$$

$$= \frac{x^2}{2} - y^3\cdot x - y^2\cos x + g(y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \qquad -3y^2x-2y\cos x + g'(y) = -3xy^2-2y\cos x$$

$$g'(y) = 0$$

$$g(y) = c$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy^3 - y^2\cos x + c$$

f. $x\dfrac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2xe^x + 6x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = 2xe^x + 6x^2$$ Es una ecuacion lineal.

$$P(x) = \frac{1}{x} \qquad \int P(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln x} = x$$

$$\frac{d}{dx}[x\cdot y] = x\cdot(2xe^x+6x^2)$$

$$xy = \int (2x^2e^x + 6x^3)\,dx$$

$$xy = \underbrace{\int 2x^2e^x\,dx}_{\text{Por Partes.}} + \int 6x^3\,dx$$

$$\int 2x^2e^x\,dx = 2x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$$

$$\begin{array}{ccc} u & & dv \\ 2x^2 & & e^x \\ & + & \\ 4x & & e^x \\ & - & \\ 4 & & e^x \\ & + & \\ 0 & & e^x \end{array}$$

Retomando

$$x\cdot y = 2x^2e^x - 4xe^x + 4e^x + \frac{6x^4}{4} + c$$

$$y = 2xe^x - 4e^x + 4x^{-1} + \frac{3}{2}x^3 + cx^{-1}$$

g. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{y+x}$ $\qquad (y+x)\,dy = (y-x)\,dx$

$$-(y-x)\,dx + (y+x)\,dy = 0$$

$(x-y)\,dx + (y+x)\,dy = 0$ Es una ecuación homogénea

$y = ux \qquad dy = x\,du + u\,dx$

$$(x-ux)\,dx + (ux+x)(x\,du + u\,dx) = 0$$

$$x\,dx - \cancel{ux\,dx} + ux^2du + u^2x\,dx + x^2du + \cancel{ux\,dx} = 0$$

$$(x+u^2x)\,dx + (ux^2+x^2)\,du = 0$$

$$x(1+u^2)\,dx + x^2(u+1)\,du = 0$$

$$x(1+u^2)\,dx = -x^2(u+1)\,du$$

$$\frac{-x}{x^2}\,dx = \frac{u+1}{1+u^2}\,du$$

$$\int \frac{-1}{x}\,dx = \int\left(\frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{1+u^2}\right)du$$

$$-\ln x = \int \frac{u\,du}{1+u^2} + \tan^{-1}u + C$$

$w = 1+u^2$

$dw = 2u\,du$

$du = \dfrac{dw}{2u}$

$$-\ln x = \int \frac{\cancel{u}}{w}\,\frac{dw}{2\cancel{u}} + \tan^{-1}u + c$$

$$-\ln x = -\frac{1}{2}\ln|w| + \tan^{-1}u + c$$

$$-\ln x = -\frac{1}{2}\ln|1+u^2| + \tan^{-1}u + C$$

$u = \frac{y}{x}$ $\quad -\ln x = -\frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right| + \tan^{-1}(y/x) + C$

h. $x y^2 \frac{dy}{dx} = y^3 - x^3 \qquad y(1)=2$

$x y^2\, dy = (y^3 - x^3)dx \qquad xy^2 dy - (y^3 - x^3)dx = 0$

$(x^3 - y^3)dx + xy^2 dy = 0$ Ecuación homogenea de tercer grado.

$y = ux \qquad dy = u\,dx + x\,du$

$(x^3 - (ux)^3)dx + x(ux)^2(u\,dx + x\,du) = 0$

$(x^3 - u^3x^3)dx + x^3u^2(u\,dx + x\,du) = 0$

$x^3dx - \cancel{u^3x^3dx} + \cancel{x^3u^3dx} + x^4u^2du = 0$

$x^3dx + x^4u^2du = 0 \qquad x^3dx = -x^4u^2du$

$-\frac{x^3}{x^4}dx = u^2du \qquad -\int \frac{1}{x}dx = \int u^2 du$

$-\ln x + C = \frac{u^3}{3}$

$-\ln x + C = \frac{(y/x)^3}{3} \qquad -\ln x + C = \frac{1}{3}(y/x)^3$

Si $y=2$ en $x=1$ $\qquad -\ln 1 + C = \frac{1}{3}(2/1)^3$

$C = \frac{1}{3}\cdot 8 \qquad C = \frac{8}{3}$

Solución $\quad -\ln x + \frac{8}{3} = \frac{1}{3}(y/x)^3$

i. $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{y^2}$

$x\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y^2} - y \qquad x\frac{dy}{dx} = \frac{2-y^3}{y^2}$

$\frac{y^2}{2-y^3}dy = \frac{dx}{x} \qquad \int \frac{y^2}{2-y^3}dy = \int \frac{1}{x}dx$

$u = 2 - y^3$

$du = -3y^2dy$

$dy = \frac{du}{-3y^2}$

$$\int \frac{y^2}{u} \cdot \frac{du}{-3y^2} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\ln u = \ln x + c \qquad u = y/x$$

$$-\frac{1}{3}\ln(y/x) = \ln x + c$$

$$-1/3(\ln y - \ln x) = \ln x + c$$

$$-\frac{1}{3}\ln y + \frac{1}{3}\ln x - \ln x = c$$

$$-\frac{1}{3}\ln y - \frac{2}{3}\ln x = c$$

$$-\ln y - 2\ln x = c$$

$$-\ln y - \ln x^2 = c$$

$$-(\ln y \cdot x^2) = c$$

$$\ln y \cdot x^2 = c \qquad e^{yx^2} = e^c$$

$$y x^2 = c \qquad y = c/x^2$$

j. $t^2\frac{dy}{dt} + y^2 = ty$

$$t^2\frac{dy}{dt} = ty - y^2 \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{ty - y^2}{t^2}$$

$$t^2 dy = (ty - y^2)dt \qquad -(ty - y^2)dt + t^2 dy = 0$$

Es una ecuación homogenea.

$$y = u \cdot t \qquad dy = u\,dt + t\,du.$$

$$-(t \cdot ut - (ut)^2)dt + t^2(u\,dt + t\,du) = 0$$

$$-\cancel{t^2u\,dt} + u^2t^2dt + \cancel{ut^2dt} + t^3du = 0$$

$$u^2t^2dt = -t^3du$$

$$\frac{t^2}{-t^3}dt = \frac{du}{u^2} \qquad -\int \frac{dt}{t} = \int u^{-2}du$$

$$-\ln t = \frac{u^{-1}}{-1} + c$$

$$-\ln t = -\frac{1}{u} + c \qquad -\ln t = -\frac{1}{y/t} + c$$

$$-\ln t = -\frac{t}{y} + c \qquad \frac{t}{y} + \ln t = c$$

5. a. $(y-4x-1)^2 dx - dy = 0$

$$(y-4x-1)^2 dx = dy$$

$$(y-4x-1)^2 = \frac{dy}{dx}$$

$$16x^2 - 8xy + 8x + y^2 - 2y + 1 = \frac{dy}{dx}$$ No es de Bernoulli

Por sustitución

$$u = y - 4x - 1 \qquad \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 4 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 4$$

$$u^2 = \frac{du}{dx} + 4 \qquad u^2 - 4 = \frac{du}{dx}$$

$$dx = \frac{du}{u^2-4} \qquad \int dx = \int \frac{du}{u^2-4}$$

$$\frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2} = \frac{1}{u^2-4}$$

$$A(u+2) + B(u-2) = 1$$

Si $u = 2$ $\quad A = 1/4$
Si $u = -2$ $\quad B = -1/4$

$$\int dx = \int \frac{A}{u-2}\,du + \int \frac{B}{u+2}\,du$$

$$x = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u-2} - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u+2}$$

$$x = \frac{1}{4}\ln|u-2| - \frac{1}{4}\ln|u+2|$$

$$x = \frac{1}{4}\left(\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|\right) \qquad 4x = \ln\left(\frac{u-2}{u+2}\right)$$

b. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^3y^2$ Ecuación de Bernoulli

$u=y^{-1}$ $\quad y=u^{-1}$ $\quad \frac{dy}{dx}=-u^{-2}\frac{du}{dx}$

$-u^{-2}\frac{du}{dx}+\frac{u^{-1}}{x}=x^2u^{-2}$

$\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=x^2$ $\Big\{$ ya es lineal.

$P(x)=-\frac{1}{x}$ $\quad \int P(x)\,dx=\int -\frac{1}{x}dx=-\ln x$

$e^{\int P(x)dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=x^{-1}$

$\frac{d}{dx}\left[x^{-1}\cdot u\right]=x^{-1}\cdot x^2$

$x^{-1}\cdot u=\int x\,dx$ $\quad x^{-1}u=\frac{x^2}{2}+C$

$u=\frac{x^2}{2x^{-1}}+\frac{C}{x^{-1}}$ $\quad u=\frac{1}{2}x^3+C\cdot x$

$\frac{1}{y}=\frac{1}{2}x^3+Cx$ $\quad y=\frac{1}{\frac{1}{2}x^3+Cx}$

c. $\cos(x+y)dy=\operatorname{sen}(x+y)dx$ $\quad \cos(x+y)\frac{dy}{dx}=\operatorname{sen}(x+y)$

$u=x+y$ $\quad \frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$

$\cos u\cdot\left(\frac{du}{dx}-1\right)=\operatorname{sen}u.$

$\frac{du}{dx}-1=\frac{\operatorname{sen}u}{\cos u}.$

$\frac{du}{dx}=\tan u+1$ $\quad \frac{du}{\tan u+1}=dx$

$\frac{du}{\frac{\operatorname{sen}u}{\cos u}+1}=dx$ $\quad \frac{du}{\frac{\operatorname{sen}u+\cos u}{\cos u}}=dx$

$\frac{\cos u\,du}{\operatorname{sen}u+\cos u}=dx$

$\frac{\cos u\cdot(\operatorname{sen}u-\cos u)du}{\operatorname{sen}^2u+\cos^2u}=dx$ $\quad (\cos u\operatorname{sen}u-\cos^2u)du=dx$

$$\int \cos u \operatorname{sen} u \, du - \int \cos^2 u \, du = \int dx$$

$w = \operatorname{sen} u$
$dw = \cos u \, du$

$$\int w \, dw - \left(\frac{1}{2}\cos u \cdot \operatorname{sen} u + \frac{1}{2}u\right) + c = x$$

$$\frac{w^2}{2} - \frac{1}{2}\cos u \operatorname{sen} u - \frac{1}{2}u + c = x$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 u}{2} - \frac{1}{2}\cos u \operatorname{sen} u - \frac{1}{2}u + c = x$$

$u = x + y$

$$\frac{\operatorname{sen}^2(x+y)}{2} - \frac{1}{2}\cos(x+y)\operatorname{sen}(x+y) - \frac{1}{2}(x+y) + c = x$$

d. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{xy}\,dx$

$$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{xy}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}$$ *Ecuación de Bernoulli*

$u = y^{1-n} \qquad u = y^{1-1/2} \qquad u = y^{1/2}$

$y = u^2 \qquad \frac{dy}{dx} = 2u\frac{du}{dx}$

$$2u\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u^2 = \frac{1}{x^{1/2}} \cdot u$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{2x}u = \frac{1}{2x^{1/2}} \cdot 1$$ *Ya es lineal*

$P(x) = -\frac{1}{2x} \qquad \int P(x)\,dx = -\int \frac{1}{2x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln x$

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln x} = e^{\ln x^{-1/2}} = x^{-1/2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-1/2} \cdot u\right] = x^{-1/2} \cdot \frac{1}{2x^{1/2}}$$

$$x^{-1/2} \cdot u = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \qquad x^{-1/2} \cdot u = \frac{1}{2}\ln x + c$$

$$u = \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x^{-1/2}} + \frac{c}{x^{-1/2}} \qquad u = \frac{1}{2}\sqrt{x}\ln x + \sqrt{x} \cdot c$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\sqrt{x}\ln x + \sqrt{x} \cdot c$$

Problemas
Aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales.

6. $\frac{dc}{dt} \propto C(t)$

$$\frac{dc}{dt} = -KC$$

$$\frac{dc}{C} = -k\,dt \qquad \int \frac{dc}{C} = -\int k\,dt$$

$$\ln C = -kt + c \qquad e^{\ln C} = e^{-kt+c}$$

$$C = e^{-kt} \cdot e^{c} \qquad C = C_0 e^{-kt} \qquad C_0 = C(0)$$

7. $\frac{dT}{dt} \propto T - Ta$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - Ta)$$

$$\frac{dT}{T - Ta} = k\,dt \qquad \int \frac{dT}{T-Ta} = \int k\,dT$$

$$\ln|T - Ta| = kt + c$$

$$e^{\ln|T-Ta|} = e^{kt+c}$$

$$T - Ta = c\,e^{kt}$$

$$T_a = 20 \qquad T(0) = 100 \qquad T(15) = 60$$

$$T - 20 = c\,e^{kt}$$

$$100 - 20 = c\,e^{0} \qquad C = 80$$

$$T - 20 = 80\,e^{kt}$$

$$60 - 20 = 80\,e^{15k}$$

$$40 = 80\,e^{15k} \qquad \frac{40}{80} = e^{15k} \qquad \frac{1}{2} = e^{15k}$$

$$\ln 1/2 = 15k \qquad k = \frac{\ln 1/2}{15} \qquad k = -0{,}0462$$

$$T(t) = 20 + 80\,e^{-0{,}0462\,t}$$

$$T(30) = 20 + 80\,e^{-0{,}0462\,(30)} = 40°C$$

8. $P(0) = 800$

$P(2) = 1800$

$\frac{dP}{dt} \propto P \qquad \frac{dP}{dt} = kP$

$\frac{dP}{P} = k\,dt \qquad \int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$

$\ln P = kt + c$

$e^{\ln P} = e^{kt+c} \qquad P = c\,e^{kt}$

$P(0) = 800 \qquad 800 = c\,e^{0} \qquad c = 800$

$P = 800\,e^{kt}$

$1800 = 800\,e^{2k} \qquad \frac{18\cancel{00}}{8\cancel{00}} = e^{2k}$

$\ln \frac{18}{8} = 2k \qquad k = \frac{\ln \frac{18}{8}}{2} \qquad k = 0,4054$

$P = 800\,e^{0,4054}$

9. $\frac{dT}{dt} \propto T - T_a \qquad \frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$

$T(0) = 130 \qquad T(0.5) = 100 \qquad T_a = 75$

$\frac{dT}{T - T_a} = k\,dt \qquad \int \frac{dT}{T - T_a} = \int k\,dt$

$\ln |T - T_a| = kt + c$

$e^{\ln |T - T_a|} = e^{kt+c} \qquad T - T_a = c\,e^{kt}$

$T(0) = 130 \qquad 130 - 75 = c\,e^{0}$

$T = 75 + 55\,e^{kt} \qquad 55 = c$

$T(0,5) = 100 \qquad 100 - 75 = 55\,e^{0.5k}$

$25 = 55\,e^{0.5k}$

$\frac{25}{55} = e^{0.5k} \qquad \ln \frac{25}{55} = 0.5k$

$k = \frac{\ln \frac{25}{55}}{0.5} \qquad k = -1,5769$

$T = 75 + 55\,e^{-1,5769\,t} \qquad T(1,0) = 75 + 55\,e^{-1.5769(1)} = 86,36\,°F$

10. $P(0) = 1600$
$P(50) = 2510$

$P = P_o e^{kt}$ $\quad P_o = 1600$

$P = 1600e^{kt}$ $\quad P(50) = 2510 = 1600e^{k \cdot 50}$

$\frac{2510}{1600} = e^{50k}$ $\quad \ln \frac{2510}{1600} = 50k$

$k = \frac{\ln \frac{2510}{1600}}{50} = 0{,}0090055$

$P(t) = 1600\, e^{0{,}0090055t}$

$P(110) = 1600\, e^{0{,}0090055(110)} = 4308{,}62$ millones

11. $T - T_a = C\, e^{kt}$

$T(0) = 70$ $\quad 70 - T_a = C\, e^{0}$
$T(5) = 60$ $\quad 60 - T_a = C\, e^{5k}$
$T(10) = 54$ $\quad 54 - T_a = C\, e^{10k}$

$C = 70 - T_a$ $\quad 60 - T_a = (70 - T_a)\, e^{5k}$
$54 - T_a = (70 - T_a)\, e^{10k}$

$\left(\frac{60 - T_a}{70 - T_a}\right)^2 = \left(e^{5k}\right)^2$ $\quad \frac{54 - T_a}{70 - T_a} = e^{10k}$

$\frac{(60 - T_a)^2}{(70 - T_a)^{\cancel{2}}} = \frac{54 - T_a}{\cancel{70 - T_a}}$

$(60 - T_a)^2 = (54 - T_a)(70 - T_a)$

$3600 - 120T_a + \cancel{T_a^2} = 3780 - 54T_a - 70T_a + \cancel{T_a^2}$

$3600 - 3780 = 120T_a - 124T_a$

$-180 = -4T_a$ $\quad T_a = 45^\circ$

Temperatura del interior $= 45^\circ F$

$C = 70 - 45 = 25^\circ C$

12. $P_0 = 400000$

$P(3) = 450.000$

$P = P_0 e^{kt}$

$P(t) = 400.000\, e^{kt}$

$P(3) = 450.000 = 400.000\, e^{k*3}$

$\frac{450000}{400000} = e^{3k}$ $\qquad \ln\frac{45}{40} = 3k$

$k = \frac{\ln\frac{45}{40}}{3} = 0{,}03926$

$P(t) = 400.000\, e^{0.03926t}$

$P(10) = 400000\, e^{0.03926(10)} = 592336{,}37$

13. $P = P_0 e^{kt}$

$P(2) = 150 \qquad P(5) = 400$

$150 = P_0 e^{2k} \qquad 400 = P_0 e^{5k}$

$\frac{400}{150} = \frac{P_0 e^{5k}}{P_0 e^{2k}} \qquad \frac{400}{150} = e^{3k}$

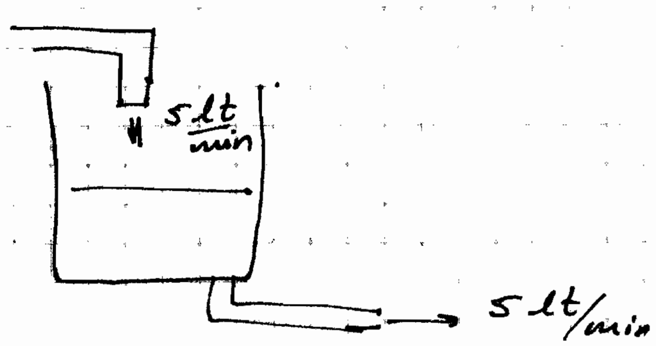
$\ln\frac{400}{150} = 3k \qquad k = \frac{\ln\frac{400}{150}}{3} = 0{,}326943$

$P_0 = 150\, e^{-2k}$

$P_0 = 150\, e^{-2(0.326943)} = 78$

Se tenían inicialmente 78 bacterias

14.



$\frac{dA}{dt} = R_{entra} - R_{sale}$

$R_{entra} = 5\,\frac{lt}{min} * \frac{0{,}1\,kg}{lt} = 0{,}5\,\frac{kg}{min}$

$$R_{sale} = 5\frac{lt}{min} * \frac{A}{1500} = \frac{A}{300} \ \ Kg/min$$

$$\frac{dA}{dt} = 0{,}5 - \frac{A}{300} \qquad \frac{dA}{dt} + \frac{A}{300} = 0.5$$ Ecuación lineal.

$$P = \frac{1}{300} \qquad \int P(t)dt = \frac{1}{300}t$$

$$e^{\int P(t)dt} = e^{\frac{1}{300}t}$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{1}{300}t} \cdot A\right] = 0.5 * \frac{1}{300} t \cdot$$

$$e^{\frac{1}{300}t} \cdot A = \frac{t}{600} dt$$

$$e^{\frac{1}{300}t} \cdot A = \int \frac{t\,dt}{600} \qquad A = \frac{\frac{t^2}{1200} + C}{e^{\frac{1}{300}t}}$$

$$A = \frac{t^2}{1200} e^{-\frac{1}{300}t} + C e^{-\frac{1}{300}t}$$

$$S \quad A(0) = 0 \qquad 0 = 0 + C \quad C = 0$$

$$A = \frac{t^2}{1200} e^{-\frac{1}{300}t}$$

(15) $$R_{sale} = 5\frac{lt}{min} * \frac{A}{1500+t} = \frac{5A}{1500+t}$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.5 - \frac{5A}{1500+t} \qquad \frac{dA}{dt} + \frac{5A}{1500+t} = 0.5$$ Ecuación lineal.

$$P(t) = \frac{5}{1500+t} \qquad \int P(t)dt = \int \frac{5}{1500+t} dt$$

$$\int P(t)dt = 5 \ln(1500+t)$$

$$e^{\int P(t)dt} = e^{5\ln(1500+t)} = e^{\ln(1500+t)^5} = (1500+t)^5$$

$$\frac{d}{dt}\left[(1500+t)^5 A\right] = 0.5(1500+t)^5 \qquad (1500+t)^5 A = \int \frac{1}{2}(1500+t)^5 dt$$

$$A = \frac{\frac{1}{2}\frac{(1500+t)^6}{6} + C}{(1500+t)^5} \ ; \quad A = \frac{1}{12}(1500+t) + C(1500+t)^{-5}$$

$$A(0) = 0 \qquad 0 = \frac{1}{12} \cdot 1500 + C(1500)^{-5} \qquad C = 9{,}49 * 10^{17}$$

$$A = \frac{1}{12}(1500+t) + 9{,}49 * 10^{17}(1500+t)^{-5}$$